1 DOWODY DOTYCZĄCE PODZIELNOŚCI

Wiele dowodów dotyczy podzielności przez jakąś wybraną liczbę lub tego, że dana liczba jest wielokrotnością jakiejś liczby. Tak naprawdę oba te stwierdzenia są tożsame. Omówimy je na przykładzie.

TROCHĘ TEORII | ZAPIS LICZB PODZIELNYCH PRZEZ OKREŚLONĄ WARTOŚĆ

Jeśli chcemy wykazać, że liczba jest podzielna przez 7, to należy tę liczbę przedstawić jako iloczyn liczby 7 i dowolnej liczby całkowitej.

Liczba 21 jest podzielna przez 7, ponieważ można ją rozłożyć na iloczyn → $21 = 3 \cdot 7$.

Liczba 91 jest podzielna przez 7, ponieważ można ją rozłożyć na iloczyn → $91 = 13 \cdot 7$.

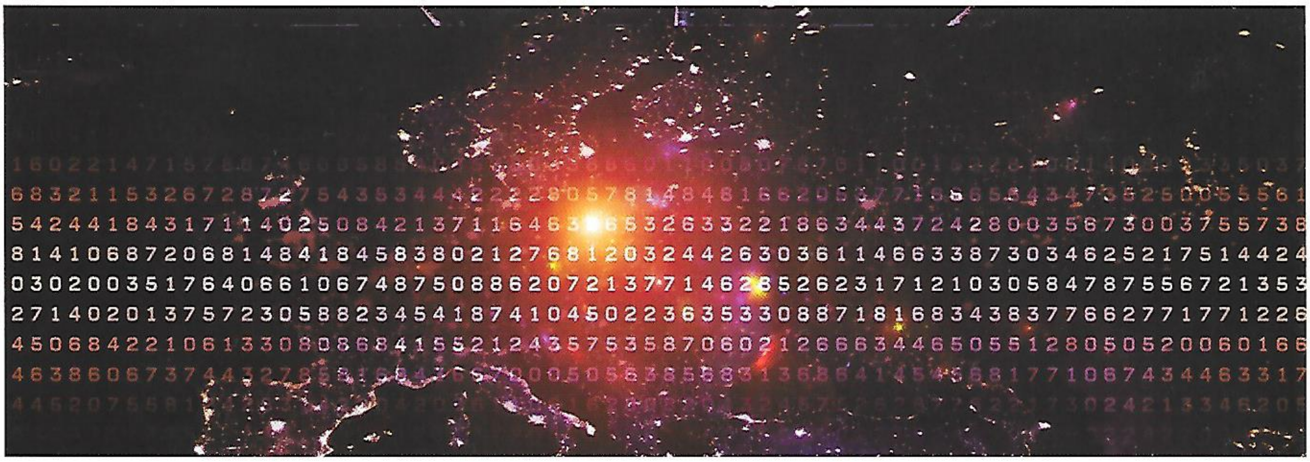
Liczba 8638 jest podzielna przez 7, ponieważ można ją rozłożyć na iloczyn → $8638 = 1234 \cdot 7$.

Zauważmy, że gdybyśmy mieli stwierdzić, czy na przykład liczba $7 \cdot 125\,893$ dzieli się przez 7, to musielibyśmy uznać, że jest to pytanie retoryczne. Odpowiemy, że oczywiście tak, mimo że nie znamy wartości tego iloczynu.

Zauważmy, że każdą liczbę podzielną przez 7 możemy rozłożyć na iloczyn liczby 7 i określonej liczby całkowitej, której wartość nie jest dla nas istotna. W dowodach wyrażenie, które jest liczbą całkowitą, zastępujemy dowolną literą, np.

$$7 \cdot k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C}$$

Zapis ten oznacza, że wyrażenie $7k$ jest wielokrotnością liczby 7 i liczby całkowitej k, czyli jest liczbą podzielną przez 7.



DOWÓD 1 | **P** Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Oznaczamy trzy kolejne liczby całkowite dla $n \in \mathbb{C}$.

n — pierwsza liczba całkowita
$n+1$ — druga liczba całkowita
$n+2$ — trzecia liczba całkowita

2° Zapisujemy sumę liczb i redukujemy wyrazy podobne.

$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 =$

3° Wyłączamy liczbę 3 przed nawias. Liczba w nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy więc iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej, więc suma ta jest podzielna przez 3.

$= 3\underbrace{(n+1)}_{k \in \mathbb{C}} = 3k$

DOWÓD 2 **P** Wykaż, że suma kwadratów pięciu kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 5.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Oznaczamy pięć kolejnych liczb całkowitych dla $n \in \mathbb{C}$.

n — pierwsza liczba całkowita
$n+1$ — druga liczba całkowita
$n+2$ — trzecia liczba całkowita
$n+3$ — czwarta liczba całkowita
$n+4$ — piąta liczba całkowita

2° Zapisujemy sumę kwadratów tych liczb i porządkujemy wyrażenie.

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2=$$
$$=n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4+n^2+6n+9+n^2+8n+16=$$
$$=5n^2+20n+30=$$

3° Wyłączamy liczbę 5 przed nawias. Wyrażenie w nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy iloczyn liczby 5 i liczby całkowitej, więc suma kwadratów jest podzielna przez 5.

$$=5\underbrace{(n^2+4n+6)}_{k\in\mathbb{C}}=5k$$

DOWÓD 3 **P** Udowodnij, że suma kwadratów czterech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 8.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Oznaczamy cztery kolejne liczby parzyste dla $n \in \mathbb{C}$.

$2n$ — pierwsza liczba parzysta
$2n+2$ — druga liczba parzysta
$2n+4$ — trzecia liczba parzysta
$2n+6$ — czwarta liczba parzysta

2° Zapisujemy sumę kwadratów tych liczb i porządkujemy wyrażenie.

$$(2n)^2+(2n+2)^2+(2n+4)^2+(2n+6)^2=$$
$$=4n^2+4n^2+8n+4+4n^2+16n+16+4n^2+24n+36=$$
$$=16n^2+48n+56=$$

3° Wyłączamy liczbę 8 przed nawias. Wyrażenie w nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy więc iloczyn liczby 8 i liczby całkowitej, więc suma kwadratów jest podzielna przez 8.

$$=8\underbrace{(2n^2+6n+7)}_{k\in\mathbb{C}}=8k$$

DOWÓD 4 **R** Uzasadnij, że różnica sześcianów dwóch liczb całkowitych różniących się o trzy jest podzielna przez 9.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Oznaczamy kolejne liczby różniące się o 3 dla $n \in \mathbb{C}$.

n — pierwsza liczba całkowita
$n+3$ — druga liczba całkowita

2° Zapisujemy różnicę sześcianów liczb i porządkujemy wyrażenie, korzystając ze wzoru: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

$$(n+3)^3-n^3=\cancel{n^3}+9n^2+27n+27-\cancel{n^3}=$$

3° Wyłączamy liczbę 9 przed nawias. Liczba w nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy iloczyn liczby 9 i liczby całkowitej, więc różnica sześcianów jest podzielna przez 9.

$$=9\underbrace{(n^2+3n+3)}_{k\in\mathbb{C}}=9k$$

DOWÓD 5 **P** Udowodnij, że wyrażenie $(n+4)^2+(3n-4)(3n+4)+2n$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest podzielne przez 10.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Porządkujemy wyrażenie.

$$(n+4)^2+(3n-4)(3n+4)+2n=$$
$$=n^2+8n+\cancel{16}+9n^2-\cancel{16}+2n=10n^2+10n=$$

2° Wyłączamy liczbę 10 przed nawias. Wyrażenie w nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy iloczyn liczby 10 i liczby całkowitej, więc wyrażenie jest podzielne przez 10.

$$=10\underbrace{(n^2+n)}_{k\in\mathbb{C}}=10k$$

DOWÓD 6 **P** Wykaż, że liczba $5^{2015}+5^{2016}+5^{2017}$ jest podzielna przez 31.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy 5^{2015} przed nawias, korzystając ze wzoru: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$5^{2015} + 5^{2016} + 5^{2017} = 5^{2015}(1 + 5^1 + 5^2) =$$

2° Wykonujemy działania w nawiasie. Liczba 5^{2015} jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy iloczyn liczby 31 i liczby całkowitej, więc wyjściowa liczba jest podzielna przez 31.

$$= 5^{2015}(1 + 5 + 25) = 31 \cdot \underbrace{5^{2015}}_{k \in \mathbb{C}} = 31k$$

DOWÓD 7 P Wykaż, że suma $2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + 2015^5 + 2015^6$ jest podzielna przez 2016.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Z każdej pary dwóch kolejnych liczb wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, korzystając ze wzoru: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + 2015^5 + 2015^6 =$$
$$= 2015(1 + 2015) + 2015^3(1 + 2015) + 2015^5(1 + 2015) =$$

2° Wyłączamy wspólny czynnik $(1 + 2015)$ przed nawias.

$$= (1 + 2015)(2015 + 2015^3 + 2015^5) =$$
$$= 2016(2015 + 2015^3 + 2015^5) =$$

3° Wyrażenie w nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy więc iloczyn liczby 2016 i liczby całkowitej, czyli suma jest podzielna przez 2016.

$$= 2016\underbrace{(2015 + 2015^3 + 2015^5)}_{k \in \mathbb{C}} = 2016k$$

DOWÓD 8 P Udowodnij, że liczba $4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{79} + 4^{80}$ jest podzielna przez 20.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy wspólny czynnik z każdej pary dwóch kolejnych liczb.

$$4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \ldots + 4^{79} + 4^{80} =$$
$$= 4(1 + 4) + 4^3(1 + 4) + \ldots + 4^{79}(1 + 4) =$$

2° Następnie jeszcze raz wyłączamy wspólny czynnik $(1 + 4)$ przed nawias oraz dodatkowo z pozostałych składników liczbę 4. Wyrażenie w nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy iloczyn liczby 20 i liczby całkowitej, więc wyjściowa liczba jest podzielna przez 20.

$$= (1 + 4)(4 + 4^3 + \ldots + 4^{79}) = 5(4 + 4^3 + \ldots + 4^{79}) =$$
$$= 5 \cdot 4\underbrace{(1 + 4^2 + \ldots + 4^{78})}_{k \in \mathbb{C}} = 20k$$

DOWÓD 9 P Udowodnij, że liczba $7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{99}$ jest podzielna przez 57.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy z każdych trzech kolejnych liczb ich największy wspólny dzielnik.

$$7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{99} =$$
$$= 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6 + \ldots + 7^{97} + 7^{98} + 7^{99} =$$
$$= 7 \cdot (1 + 7 + 7^2) + 7^4 \cdot (1 + 7 + 7^2) + \ldots + 7^{97} \cdot (1 + 7 + 7^2) =$$

2° Następnie jeszcze raz wyłączamy wspólny czynnik przed nawias. Wyrażenie w drugim nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy iloczyn liczby 57 i liczby całkowitej, więc wyjściowa liczba jest podzielna przez 57.

$$= (1 + 7 + 49)\underbrace{(7 + 7^4 + 7^7 + \ldots + 7^{97})}_{k \in \mathbb{C}} = 57k$$

DOWÓD 10 P Wykaż, że liczba $7^{1000} - 5 \cdot 7^{999} + 3 \cdot 7^{998}$ jest podzielna przez 17.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy wspólny czynnik 7^{998} przed nawias, korzystając ze wzoru: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, następnie wykonujemy działania w nawiasie.

$$7^{1000} - 5 \cdot 7^{999} + 3 \cdot 7^{998} = 7^{998}(7^2 - 5 \cdot 7 + 3) =$$
$$= 7^{998}(49 - 35 + 3) = 7^{998} \cdot 17 =$$

2° Liczba 7^{998} jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy więc iloczyn liczby 17 i liczby całkowitej, zatem wyjściowa liczba jest podzielna przez 17.

$$= \underbrace{7^{998}}_{k \in \mathbb{C}} \cdot 17 = 17k$$

DOWÓD 11 **R** Wykaż, że wyrażenie $3^n+3^{n+1}+3^{n+2}+3^{n+3}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, jest podzielne przez 120.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy ze wzoru: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ i rozkładamy poszczególne liczby, a następnie porządkujemy wyrażenie.

$$3^n+3^{n+1}+3^{n+2}+3^{n+3} = 3^n+3^n\cdot 3+3^n\cdot 3^2+3^n\cdot 3^3 =$$
$$= 3^n+3\cdot 3^n+9\cdot 3^n+27\cdot 3^n = 40\cdot 3^n = 40\cdot 3\cdot 3^{n-1} =$$

2° Skoro $n \in \mathbb{N}_+$, to liczba 3^{n-1} jest całkowita. Otrzymaliśmy więc iloczyn liczby 120 i liczby całkowitej, zatem wyjściowa liczba jest podzielna przez 120.

$$= 120\cdot \underbrace{3^{n-1}}_{k\in\mathbb{C}} = 120k$$

DOWÓD 12 **R** Uzasadnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $7^{n+1}+8\cdot 9^n+7^n$ jest wielokrotnością liczby 8.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy ze wzoru: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, redukujemy potęgi, a następnie wyłączamy wspólne czynniki przed nawias.

$$7^{n+1}+8\cdot 9^n+7^n = 7^n\cdot 7+8\cdot 9^n+7^n =$$
$$= 8\cdot 7^n+8\cdot 9^n =$$

2° Wyrażenie w nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy iloczyn liczby 8 i liczby całkowitej, czyli wielokrotność liczby 8.

$$= 8\underbrace{(7^n+9^n)}_{k\in\mathbb{C}} = 8k$$

DOWÓD 13 **R** Wykaż, że wyrażenie 21^8-19^8 jest podzielne przez 80.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, pamiętając, że $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$.

$$21^8-19^8 = (21^4-19^4)(21^4+19^4) =$$

2° Powtarzamy przekształcenia w stosunku do wyrażenia z pierwszego nawiasu.

$$= (21^2-19^2)(21^2+19^2)(21^4+19^4) =$$
$$= (441-361)(21^2+19^2)(21^4+19^4) =$$

3° Wyrażenie $(21^2+19^2)(21^4+19^4)$ jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy więc iloczyn liczby 80 i liczby całkowitej, zatem wyrażenie jest podzielne przez 80.

$$= 80\underbrace{(21^2+19^2)(21^4+19^4)}_{k\in\mathbb{C}} = 80k$$

DOWÓD 14 **R** Wykaż, że wyrażenie 1015^3+985^3 jest podzielne przez 1000.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy ze wzoru: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$$1015^3+985^3 = (1015+985)(1015^2-1015\cdot 985+985^2) =$$
$$= 2000(1015^2-1015\cdot 985+985^2) =$$

2° Wyrażenie $2\cdot(1015^2-1015\cdot 985+985^2)$ jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy więc iloczyn liczby 1000 i liczby całkowitej, zatem wyrażenie jest podzielne przez 1000.

$$= 1000\cdot \underbrace{2\cdot(1015^2-1015\cdot 985+985^2)}_{k\in\mathbb{C}} = 1000k$$

DOWÓD 15 **R** Wykaż, że suma 9^6+11^6 jest podzielna przez 202.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy ze wzoru: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, zapisując $9^6=(9^2)^3$ oraz $11^6=(11^2)^3$.

$$9^6+11^6 = (9^2)^3+(11^2)^3 = (9^2+11^2)(9^4-9^2\cdot 11^2+11^4) =$$

2° Obliczamy wartość pierwszego nawiasu. Wyrażenie w drugim nawiasie jest liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy więc iloczyn liczby 202 i liczby całkowitej, zatem wyrażenie jest podzielne przez 202.

$$= (81+121)\underbrace{(9^4-9^2\cdot 11^2+11^4)}_{k\in\mathbb{C}} = 202k$$

TROCHĘ TEORII | WŁASNOŚCI CHARAKTERYZUJĄCE ILOCZYNY KOLEJNYCH LICZB CAŁKOWITYCH

Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest zawsze podzielny przez 2, ponieważ jeden z czynników tego iloczynu musi być parzysty, a drugi nieparzysty, np.:

$2 \cdot 3 = 6 = 2 \cdot 3$

$5 \cdot 6 = 30 = 2 \cdot 15$

$101 \cdot 102 = 10\,302 = 2 \cdot 5151$

Można zauważyć, że każdy z przykładowych iloczynów jest wielokrotnością liczby 2, czyli $n(n+1) = 2k$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest zawsze podzielny przez 6, ponieważ wśród trzech kolejnych liczb całkowitych co najmniej jedna liczba dzieli się przez 2 i dokładnie jedna dzieli się przez 3. Jeśli liczba dzieli się jednocześnie przez 2 i 3, to dzieli się przez 6, np.:

$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 6 \cdot 4$

$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 = 6 \cdot 84$

$100 \cdot 101 \cdot 102 = 1\,030\,200 = 6 \cdot 171\,700$

Można zauważyć, że każdy z przykładowych iloczynów dzieli się przez 6, czyli $n(n+1)(n+2) = 6k$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Analogicznie można przeprowadzić rozumowanie dla iloczynu większej ilości kolejnych liczb całkowitych.

Iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych jest zawsze podzielny przez $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$.

Iloczyn pięciu kolejnych liczb całkowitych jest zawsze podzielny przez $120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$.

WNIOSEK OGÓLNY Iloczyn n kolejnych liczb całkowitych jest zawsze podzielny przez $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$.

DOWÓD 16 R

Wykaż, że dla $n \in \mathbb{C}$ wyrażenie $n^3 - n$ jest podzielne przez 6.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy n przed nawias. $n^3 - n = n(n^2 - 1) =$

2° Korzystamy ze wzoru: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, aby rozłożyć wyrażenie w nawiasie, i ustawiamy czynniki w kolejności od najmniejszego do największego. $= n(n-1)(n+1) =$

3° Otrzymaliśmy iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, który jest podzielny przez 6, ponieważ co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 2 i dokładnie jeden z czynników jest podzielny przez 3. $= \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{6k,\ k \in \mathbb{C}} = 6k$

DOWÓD 17 R

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $3n^3 - 9n^2 + 6n$ jest podzielna przez 18.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy $3n$ przed nawias. $3n^3 - 9n^2 + 6n = 3n(n^2 - 3n + 2) =$

2° Wyrażenie w nawiasie przedstawiamy w postaci iloczynowej. Obliczamy Δ oraz pierwiastki równania kwadratowego. $\sqrt{\Delta} = 1, \quad n_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

3° Otrzymaliśmy iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, który jest podzielny przez 6, więc liczba dzieli się przez $3 \cdot 6 = 18$. $= 3\underbrace{n(n-1)(n-2)}_{6k,\ k \in \mathbb{C}} = 18k$

DOWÓD 18 R

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k$ jest podzielna przez 24.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy k przed nawias, a wyrażenie w nawiasie rozkładamy do postaci iloczynowej, wykorzystując metodę grupowania wyrazów.

$k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k = k(k^3 + 2k^2 - k - 2) =$

$= k[k^2(k+2) - 1(k+2)] = k(k+2)(k^2 - 1) =$

$= k(k+2)(k-1)(k+1) =$

2° Otrzymaliśmy iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych, który jest podzielny przez 24.

$$= \underbrace{(k-1)k(k+1)(k+2)}_{24l,\ l \in \mathbb{C}} = 24l$$

DOWÓD 19 **R** Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^6 - 2n^4 + n^2$ jest podzielna przez 36.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy n^2 przed nawias.

$$n^6 - 2n^4 + n^2 = n^2(n^4 - 2n^2 + 1) =$$

2° Korzystamy ze wzorów: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ oraz $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$= n^2(n^2-1)^2 = n^2(n-1)^2(n+1)^2 =$$

3° Wyłączamy potęgę poza nawias, korzystając z twierdzenia $a^n b^n = (ab)^n$. Zauważmy, że w nawiasie otrzymaliśmy iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, który jest podzielny przez 6, ponieważ co najmniej jeden z czynników dzieli się przez 2 i jeden z czynników dzieli się przez 3.

$$= [\underbrace{(n-1)n(n+1)}_{6k,\ k \in \mathbb{C}}]^2 = (6k)^2 = 36k^2$$

4° Liczba jest więc podzielna przez 36.

DOWÓD 20 **R** Uzasadnij, że dla $n \in \mathbb{N}$ liczba $n^5 - 5n^3 + 4n$ jest podzielna przez 120.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wyłączamy n przed nawias.

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) =$$

2° Zastosujemy podstawienie $t = n^2$, aby przedstawić wyrażenie w nawiasie w postaci równania kwadratowego.

$$n^4 - 5n^2 + 4 = t^2 - 5t + 4$$

3° Obliczamy pierwiastki równania, aby zamienić postać ogólną równania na postać iloczynową.

$$\sqrt{\Delta} = 3, \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4) = (n^2-1)(n^2-4)$$

4° Wracamy do wyrażenia początkowego i rozkładamy nawiasy na iloczyn, korzystając ze wzoru: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2-1)(n^2-4) =$$
$$= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) =$$

5° Po uporządkowaniu iloczynu pięciu kolejnych liczb całkowitych, wśród których jedna jest podzielna przez 2, jedna jest podzielna przez 3, jedna jest podzielna przez 4 (jest to inna liczba niż wcześniejsza podzielna przez 2), jedna jest podzielna przez 5, możemy zauważyć, że podana liczba jest podzielna przez $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

$$= \underbrace{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}_{120k,\ k \in \mathbb{C}} = 120k$$

DOWÓD 21 **R** Pierwiastkami wielomianu stopnia trzeciego są liczby 1, 3, 5. Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej tego wielomianu jest równy 5. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej wartość tego wielomianu jest liczbą podzielną przez 240.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Zapisujemy postać iloczynową wielomianu $W(x)$, korzystając z informacji, że $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$ oraz że współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 5.

$$W(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) =$$
$$= 5(x-1)(x-3)(x-5)$$

2° Oznaczamy dowolną liczbę nieparzystą jako $2n+1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, podstawiamy do wielomianu $W(x)$ i porządkujemy.

$$W(2n+1) = 5(2n+1-1)(2n+1-3)(2n+1-5) =$$
$$= 5 \cdot 2n(2n-2)(2n-4) =$$

3° Wyłączamy z obu nawiasów liczbę 2.

$$= 10n \cdot 2 \cdot 2(n-1)(n-2) =$$

4° Liczby n, $n-1$, $n-2$ są kolejnymi liczbami całkowitymi. Iloczyn tych liczb jest podzielny przez 6, ponieważ wśród tych liczb jest co najmniej jedna liczba parzysta i dokładnie jedna liczba podzielna przez 3, czyli wielomian $W(2n+1)$ jest podzielny przez $40 \cdot 6 = 240$.

$$= 40\underbrace{n(n-1)(n-2)}_{6k,\ k \in \mathbb{C}} = 240k$$

DOWÓD 22 **R** Wykaż, że liczba $5^{300} - 3 \cdot 5^{200} - 5^{100} + 3$ jest podzielna przez 48.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wprowadzamy zmienną t i rozkładamy otrzymane wyrażenie do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów.

Niech $5^{100} = t$

$$t^3 - 3t^2 - t + 3 = t^2(t-3) - (t-3) = (t-3)(t^2-1) =$$
$$= (t-3)(t-1)(t+1) =$$

2° Otrzymaliśmy iloczyn trzech kolejnych liczb parzystych, ponieważ ostatnimi cyframi wyrażeń $5^{100} - 3$, $5^{100} - 1$ oraz $5^{100} + 1$ są zawsze kolejne cyfry parzyste.

$$= \underbrace{(5^{100}-3)}_{2k}\underbrace{(5^{100}-1)}_{2k+2}\underbrace{(5^{100}+1)}_{2k+4,\ k \in \mathbb{C}} = 2k(2k+2)(2k+4) =$$

3° Wyłączamy z obu nawiasów liczbę 2. Otrzymaliśmy iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, który jest podzielny przez 6, ponieważ wśród tych liczb jest co najmniej jedna liczba parzysta i dokładnie jedna liczba podzielna przez 3, czyli całe wyrażenie dzieli się przez $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 48$.

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{k(k+1)(k+2)}_{6k,\ k \in \mathbb{C}} = 48k$$

DOWÓD 23 **R** Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ liczba $9^n - 1$ jest wielokrotnością liczby 8.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Zamieniamy potęgę $9^n = 3^{2n}$ i stosujemy wzór skróconego mnożenia, aby uzyskać iloczyn.

$$9^n - 1 = 3^{2n} - 1 =$$

2° Otrzymaliśmy iloczyn dwóch kolejnych liczb parzystych, ponieważ ostatnimi cyframi wyrażeń $3^n - 1$ oraz $3^n + 1$ są zawsze cyfry parzyste.

$$= \underbrace{(3^n-1)}_{2k}\underbrace{(3^n+1)}_{2k+2,\ k \in \mathbb{C}} = 2k(2k+2) =$$

3° Wyłączamy liczbę 2 przed nawias. Uzyskaliśmy iloczyn liczby 4 oraz iloczyn dwóch kolejnych liczb, który jest zawsze podzielny przez 2, więc wyrażenie jest podzielne przez $4 \cdot 2 = 8$.

$$= 4\underbrace{k(k+1)}_{2l,\ l \in \mathbb{C}} = 8l$$

DOWÓD 24 **R** Wykaż, że liczba $11^{11} - 1$ jest podzielna przez 10.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy ze wzoru:
$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$
i rozkładamy wyrażenie do postaci iloczynowej.

$$11^{11} - 1 = (11-1)\underbrace{(11^{10} + 11^9 + \cdots + 11 + 1)}_{k \in \mathbb{C}} = 10k$$

2° Otrzymaliśmy iloczyn liczby 10 i liczby całkowitej, więc wyjściowa liczba jest podzielna przez 10.

DOWÓD 25 **R** Wykaż, że wyrażenie $201^8 + 3 \cdot 201^4 - 4$ jest podzielne przez 4000.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wprowadzamy podstawienie.

Niech $t = 201^4$

2° Otrzymujemy wyrażenie w postaci funkcji kwadratowej, więc przekształcamy je do postaci iloczynowej.

$$201^8 + 3 \cdot 201^4 - 4 = t^2 + 3t - 4 =$$

$$\sqrt{\Delta} = 5, \quad t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

3° Powracamy do wyjściowego wyrażenia i przekształcamy je, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

$$= (t-1)(t+4) = (201^4 - 1)(201^4 + 4) =$$
$$= (201^2 - 1)(201^2 + 1)(201^4 + 4) =$$
$$= (201 - 1)(201 + 1)(201^2 + 1)(201^4 + 4) =$$

4° Ostatnią cyfrą wyrażenia $201^2 + 1$ jest 2, więc jest to liczba podzielna przez 2, a ostatnią cyfrą wyrażenia $201^4 + 4$ jest 5, więc jest to liczba podzielna przez 5.

$$= 200 \cdot 202 \cdot \underbrace{(201^2 + 1)}_{2k,\ k \in \mathbb{C}}\underbrace{(201^4 + 4)}_{5t,\ t \in \mathbb{C}} =$$

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

5° Wyrażenie jest więc podzielne przez 4000. $= 200 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 2k \cdot 5t = 4000 \cdot \underbrace{101 \cdot kt}_{n \in \mathbb{C}} = 4000n$

DOWÓD 26 **R** Wykaż, że liczba $25^{16} + 8 \cdot 25^8 - 9$ jest podzielna przez 2^7.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Wprowadzamy podstawienie.

Niech $t = 25^8$

$25^{16} + 8 \cdot 25^8 - 9 = t^2 + 8t - 9 =$

2° Otrzymujemy wyrażenie w postaci funkcji kwadratowej, które przekształcamy do postaci iloczynowej.

$\sqrt{\Delta} = 10, \quad t_{1,2} = \frac{-8 \pm 10}{2} = \begin{cases} -9 \\ 1 \end{cases}$

3° Wracamy do wyjściowego wyrażenia i przekształcamy je, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

$= (t+9)(t-1) = (25^8+9)(25^8-1) =$

$= (25^4-1)(25^4+1)(25^8+9) = (25^2-1)(25^2+1)(25^4+1)(25^8+9) =$

4° Możemy zauważyć, że trzy ostatnie czynniki są liczbami parzystymi.

$= \underbrace{(25-1)}_{24}\underbrace{(25+1)}_{26}\underbrace{(25^2+1)}_{2k,\ k \in \mathbb{C}}\underbrace{(25^4+1)}_{2l,\ l \in \mathbb{C}}\underbrace{(25^8+9)}_{2m,\ m \in \mathbb{C}} =$

5° Przedstawiamy iloczyn w taki sposób, aby jednym z czynników była liczba 2^7.

$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 2k \cdot 2l \cdot 2m = 2^7 \cdot \underbrace{3 \cdot 13 \cdot k \cdot l \cdot m}_{n \in \mathbb{C}} = 2^7 n$

6° Liczba jest więc podzielna przez 2^7.

DOWÓD 27 **R** Uzasadnij, że liczba $10^n - 4$ jest podzielna przez 6, dla $n \in \mathbb{N}_+$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Zapiszmy liczbę $10^n - 4$ tak, aby można było zauważyć z jakich cyfr i w jakiej ilości się ona składa.

$10^n - 4 = 1\underbrace{00\ldots0}_{n\ zer} - 4 =$

2° Suma cyfr tej liczby to $9(n-1)+6 = 9n-3 = 3(3n-1)$. Suma cyfr jest wielokrotnością liczby 3, więc liczba dzieli się przez 3. Ostatnia cyfra jest parzysta, więc liczba dzieli się przez 2. Jeśli liczba dzieli się przez 2 i 3, to jest podzielna przez 6.

$\underbrace{999\ldots9}_{n-1\ dziewiątek}6 = 6k,\ k \in \mathbb{C}$

DOWÓD 28 **R** Wykaż, że liczba $(10^n + 8)^2$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest podzielna przez 81.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Dla $n = 0$ wartość wyrażenia wynosi:

$(10^0 + 8)^2 = 9^2 = 81$, więc wyrażenie jest podzielne przez 81.

2° Dla $n > 0$ wyrażenie przyjmuje postać:

$10^n + 8 = 1\underbrace{00\ldots0}_{n\ zer} + 8 = 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\ zer}8 = 9k$, gdzie $k \in \mathbb{C}$

3° Suma cyfr liczby $10^n + 8$ jest równa 9, więc liczba ta dzieli się przez 9, a kwadrat tej liczby przez 81.

$(10^n + 8)^2 = (9k)^2 = 81k^2$, gdzie $k \in \mathbb{C}$

DOWÓD 29 **P** Wykaż, że suma liczb: czterocyfrowej, trzycyfrowej i dwucyfrowej postaci $AAAA + AAA + AA$ jest podzielna przez 137, wiedząc, że A oznacza dowolną cyfrę i $A \neq 0$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

WSKAZÓWKA!	Przykład: liczbę 325 można zapisać jako $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$.

1° Rozkładamy liczby na sumy wielokrotności poszczególnych cyfr i redukujemy wyrazy podobne.

$AAAA + AAA + AA = 1000A + 100A + 10A + A + 100A + 10A + A + 10A + A =$

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

2° Przedstawiamy otrzymaną liczbę jako iloczyn 137 i liczby całkowitej, więc wyjściowa suma jest podzielna przez 137.

$= 1233 \cdot A = 137 \cdot \underbrace{9A}_{k \in \mathbb{C}} = 137k$

DOWÓD 30 P

Dane są cyfry A, B, C, D różne od zera oraz suma liczb czterocyfrowych postaci $ABCD + DABC + CDAB + BCDA$. Wykaż, że suma ta jest podzielna przez 101.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Rozkładamy liczby na sumy wielokrotności poszczególnych cyfr i redukujemy wyrazy podobne.

$ABCD + DABC + CDAB + BCDA =$

$= 1000A + 100B + 10C + D + 1000D + 100A + 10B + C +$

$+ 1000C + 100D + 10A + B + 1000B + 100C + 10D + A =$

$= 1111A + 1111B + 1111C + 1111D =$

2° Wyłączamy 1111 przed nawias i rozkładamy na iloczyn liczby 101 i 11. Przedstawiliśmy liczbę jako iloczyn liczby 101 i liczby całkowitej, więc suma jest podzielna przez 101.

$= 1111(A + B + C + D) = 101 \cdot \underbrace{11(A + B + C + D)}_{k \in \mathbb{C}} = 101k$

DOWÓD 31 P

Wykaż, że iloczyn $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20$ jest podzielny przez 10 000.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° W celu otrzymania iloczynu równego 10 000 zwracamy uwagę na liczby podzielne przez 2, 5 lub 10.

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 =$

2° Rozkładamy liczbę 15 na iloczyn liczby 3 i liczby 5.

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 =$

3° Obliczamy iloczyn wyróżnionych liczb.

$= \underbrace{2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 20}_{10\,000} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 =$

4° Otrzymaliśmy iloczyn liczby 10 000 i liczby całkowitej, więc liczba jest podzielna przez 10 000.

$= 10\,000 \cdot \underbrace{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19}_{k \in \mathbb{C}} = 10\,000k$

DOWÓD 32 R

Dana jest liczba całkowita a taka, że liczba $a + 2$ jest podzielna przez 5. Udowodnij, że liczba $a^3 + 3$ też jest podzielna przez 5.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Zapisujemy liczbę $a + 2$ jako wielokrotność liczby 5.

$a + 2 = 5k \rightarrow a = 5k - 2$

2° Wyznaczoną wartość a podstawiamy do wyrażenia $a^3 + 3$, wykonujemy przekształcenia.

$a^3 + 3 = (5k - 2)^3 + 3 = 125k^3 - 150k^2 + 60k - 8 + 3 =$

$= 125k^3 - 150k^2 + 60k - 5 =$

3° Wyłączamy liczbę 5 przed nawias. Otrzymaliśmy iloczyn liczby 5 i liczby całkowitej, więc liczba $a^3 + 3$ jest podzielna przez 5.

$= 5\underbrace{(25k^3 - 30k^2 + 12k - 1)}_{l \in \mathbb{C}} = 5l$

DOWÓD 33 R

Wykaż, że liczba $101^{2015} + 104^{2015} + 105^{2015}$ jest podzielna przez 10.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Zauważmy, że gdy obliczamy kolejne potęgi liczby 101 np. $101^1 = 101$, $101^2 = 10\,201$, $101^3 = 1\,030\,301$, to ostatnią cyfrą otrzymanych wyników będzie zawsze 1, więc ostatnią cyfrą 101^{2015} jest również 1.

2° Analogicznie można zauważyć, że ostatnią cyfrą wyrażenia 105^{2015} jest 5.

3° Wypiszmy kilka pierwszych potęg liczby 104: $104^1 = 104$, $104^2 = 10\,816$, $104^3 = 1\,124\,864$, $104^4 = 116\,985\,856$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

Można zauważyć, że ostatnimi cyframi są na przemian 4 i 6. Cyfra 4 występuje wtedy, gdy wykładnik jest nieparzysty, a cyfra 6, gdy wykładnik jest parzysty, więc ostatnią cyfrą liczby 104^{2015} jest cyfra 4.

4° Jeżeli wiemy, że ostatnie cyfry poszczególnych składników sumy to 1, 4 oraz 5, to ostatnią cyfrą sumy będzie liczba 0, ponieważ $1+4+5=10$, więc liczba $101^{2015}+104^{2015}+105^{2015}=10k$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

DOWÓD 34 **R** Wykaż, że nie istnieje wielomian $W(x)$ czwartego stopnia o współczynnikach całkowitych spełniający warunki $W(1)=2k$ oraz $W(-1)=2k+1$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Zapisujemy wielomian $W(x)$ w postaci ogólnej, gdzie liczby a, b, c, d i e są liczbami całkowitymi.

$$W(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

2° Zapisujemy układ równań wynikający z warunków $W(1)=2k$ i $W(-1)=2k+1$.

$$+\begin{cases} a+b+c+d+e=2k \\ a-b+c-d+e=2k+1 \end{cases}$$

3° Dodajemy równania stronami.

$$2a+2c+2e=2k+2k+1$$

4° Wyłączamy przed nawias liczbę 2 po lewej stronie. Suma $a+c+e$ jest liczbą całkowitą. Po lewej stronie uzyskaliśmy liczbę podzielną przez 2, czyli parzystą, a po prawej liczbę nieparzystą, więc równanie jest nieprawdziwe, a wielomian $W(x)$ nie istnieje.

$$2(\underbrace{a+c+e}_{n\in\mathbb{C}})=2\cdot\underbrace{2k}_{m\in\mathbb{C}}+1$$

$$2n=2m+1$$

DOWÓD 35 **R** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej a i dla każdej liczby całkowitej b liczba a^3b-b^3a jest podzielna przez 6.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE 1

1° Liczba dzieli się przez 6, jeśli jednocześnie dzieli się przez 2 i przez 3.

2° Przekształcamy wyrażenie do postaci iloczynowej: $a^3b-b^3a=ab(a^2-b^2)=ab(a-b)(a+b)$

3° Sprawdzamy podzielność przez 2.

Przypadek 1. Jeżeli jedna z liczb a lub b jest parzysta, to co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 2, więc liczba również dzieli się przez 2.

Przypadek 2. Jeśli liczby a i b są jednocześnie nieparzyste, to otrzymujemy sytuację:

$$\underbrace{a}_{\text{nieparzysta}}\cdot\underbrace{b}_{\text{nieparzysta}}(\underbrace{\underbrace{a}_{\text{nieparzysta}}-\underbrace{b}_{\text{nieparzysta}}}_{\text{parzysta}})(\underbrace{\underbrace{a}_{\text{nieparzysta}}+\underbrace{b}_{\text{nieparzysta}}}_{\text{parzysta}})$$

Można zauważyć, że po podstawieniu dowolnych liczb nieparzystych otrzymamy dwa czynniki parzyste, więc liczba jest podzielna przez 2.

4° Sprawdzamy podzielność przez 3. Liczby przy dzieleniu przez 3 mogą mieć reszty 0, 1 lub 2.

Przypadek 1. Jeśli liczba a lub liczba b jest podzielna przez 3 (reszta równa 0), to liczba dzieli się przez 3.

Przypadek 2. Jeśli liczby a i b będą miały reszty identyczne (jednocześnie 1 lub jednocześnie 2), to liczby a i b można zapisać w sposób:

$a=3p+r$, $b=3q+r$, gdzie $p, q \in \mathbb{C}$, a $r \in \{1,2\}$

Wtedy czynnik $a-b=3p+r-(3q+r)=3p+r-3q-r=3(p-q)$ jest podzielny przez 3, a więc liczba również jest podzielna przez 3.

Przypadek 3. Jeśli jedna z liczb a lub b ma resztę z dzielenia przez 3 równą 1, a druga resztę z dzielenia przez 3 równą 2 lub odwrotnie, to liczby a i b można zapisać w sposób: $a=3p+1$ i $b=3q+2$

lub $a=3p+2$ i $b=3q+1$

Wtedy czynnik $a+b=3p+3q+3=3(p+q+1)$ jest podzielny przez 3, a więc liczba również jest podzielna przez 3.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE 1

4° Udowodniliśmy, że w każdym przypadku liczba $a^3b - b^3a$ jest podzielna jednocześnie przez 2 i przez 3, więc jest podzielna przez 6, czyli $a^3b - b^3a = 6t$, gdzie $t \in \mathbb{C}$

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE 2

1° Dopisujemy do wyrażenia jednomiany: ab oraz $-ab$. W ten sposób wyrażenie zmieni swoją postać, ale nie zmieni wartości.

$$a^3b - b^3a = a^3b - ab + ab - b^3a =$$

2° Z pierwszej pary wyłączamy przed nawias ab, a z drugiej pary $-ab$.

$$= ab(a^2 - 1) - ab(b^2 - 1) =$$

3° Rozkładamy wyrażenia w nawiasach na iloczyny, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia i zamieniamy kolejność czynników.

$$= ab(a-1)(a+1) - ab(b-1)(b+1) =$$
$$= b\underbrace{(a-1)a(a+1)}_{6k,\ k \in \mathbb{C}} - a\underbrace{(b-1)b(b+1)}_{6l,\ l \in \mathbb{C}} =$$

4° Zauważmy, że otrzymaliśmy dwa iloczyny trzech kolejnych liczb całkowitych, które są podzielne przez 6.

$$= 6\underbrace{(bk - al)}_{m \in \mathbb{C}} = 6m$$

5° Liczba jest więc podzielna przez 6.

DOWÓD 36 | **R** | **CKE** Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k(k+1)(k+9)(k^2+1)$ jest podzielna przez 5.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE

1° Iloczyn jest podzielny przez 5, jeśli co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 5.

2° Liczby przy dzieleniu przez 5 mogą mieć reszty 0, 1, 2, 3 lub 4. Sprawdzimy podzielność dla wszystkich przypadków.

Przypadek 1. Jeżeli reszta równa jest 0, to możemy zapisać, że $k = 5l$, gdzie $l \in \mathbb{C}$. Wtedy pierwszy czynnik iloczynu jest podzielny przez 5.

Przypadek 2. Jeżeli reszta jest równa 1, to możemy zapisać, że $k = 5l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{C}$.
Wtedy czynnik $k + 9 = 5l + 1 + 9 = 5l + 10 = 5(l + 2)$ jest podzielny przez 5.

Przypadek 3. Jeżeli reszta jest równa 2, to możemy zapisać, że $k = 5l + 2$, gdzie $l \in \mathbb{C}$.
Wtedy czynnik $k^2 + 1 = (5l + 2)^2 + 1 = 25l^2 + 20l + 5 = 5(5l^2 + 4l + 1)$ jest podzielny przez 5.

Przypadek 4. Jeżeli reszta jest równa 3, to możemy zapisać, że $k = 5l + 3$, gdzie $l \in \mathbb{C}$.
Wtedy czynnik $k^2 + 1 = (5l + 3)^2 + 1 = 25l^2 + 30l + 10 = 5(5l^2 + 6l + 2)$ jest podzielny przez 5.

Przypadek 5. Jeżeli reszta jest równa 4, to możemy zapisać, że $k = 5l + 4$, gdzie $l \in \mathbb{C}$.
Wtedy czynnik $k + 1 = 5l + 4 + 1 = 5l + 5 = 5(l + 1)$ jest podzielny przez 5.

3° Dla wszystkich przypadków jest zawsze spełniona podzielność przez 5 dla któregoś z czynników, więc liczba dzieli się przez 5.