Trudniejsze przykłady z logarytmów

Na prezentacji omówimy trzy trudniejsze przykłady. Będę one rozwiązane troszkę innym sposobem niż ten, który omawialiśmy na lekcji. Nie zawsze łatwo jest wpaść na to, jak zapisać np. 320 przy pomocy $6, 15$ i 27. Spróbujemy to zrobić bardziej systematycznie. Przed przeczytanie rozwiązania warto spróbować zrobić zadanie samemu.

Wprowadzenie

Przedstawmy 320 przy pomocy $6, 15$ i 27.

Wprowadzenie

Przedstawmy 320 przy pomocy $6, 15$ i 27. Po pierwsze zapiszmy:

$$6 = 2 \times 3,$$
$$15 = 3 \times 5,$$
$$27 = 3^3,$$
$$320 = 2^6 \times 5.$$

Teraz widzimy, że potrzebujemy 6 dwójek i jedną 5.

Wprowadzenie

Przedstawmy 320 przy pomocy $6, 15$ i 27. Po pierwsze zapiszmy:

$$6 = 2 \times 3,$$
$$15 = 3 \times 5,$$
$$27 = 3^3,$$
$$320 = 2^6 \times 5.$$

Teraz widzimy, że potrzebujemy 6 dwójek i jedną 5. 5 uzyskamy tylko z 15, więc zacznijmy zapisywać:

$$320 = 15 \times ...$$

Wprowadzenie

Przedstawmy 320 przy pomocy $6, 15$ i 27. Po pierwsze zapiszmy:

$$6 = 2 \times 3,$$
$$15 = 3 \times 5,$$
$$27 = 3^3,$$
$$320 = 2^6 \times 5.$$

Teraz widzimy, że potrzebujemy 6 dwójek i jedną 5. 5 uzyskamy tylko z 15, więc zacznijmy zapisywać:

$$320 = 15 \times \ldots$$

Musimy też uzyskać 6 dwójek, te uzyskamy tylko z 6:

$$320 = 15 \times 6^6 \times \ldots$$

Wprowadzenie

Przedstawmy 320 przy pomocy $6, 15$ i 27. Po pierwsze zapiszmy:

$$
\begin{aligned}
&6 = 2 \times 3, \\
&15 = 3 \times 5, \\
&27 = 3^3, \\
&320 = 2^6 \times 5.
\end{aligned}
$$

Teraz widzimy, że potrzebujemy 6 dwójek i jedną 5. 5 uzyskamy tylko z 15, więc zacznijmy zapisywać:

$$320 = 15 \times \dots$$

Musimy też uzyskać 6 dwójek, te uzyskamy tylko z 6:

$$320 = 15 \times 6^6 \times \dots$$

Pojawiło nam się przy tej okazji 7 *niechcianych* trójek. Usuniemy je dzięki 27:

$$320 = 15 \times 6^6 \times 27^{-\frac{7}{3}}$$

Wprowadzenie

Ostatecznie mamy

$$320 = 15 \times 6^6 \times 27^{-\frac{7}{3}}$$

Wprowadzenie

Ostatecznie mamy

$$320 = 15 \times 6^6 \times 27^{-\frac{7}{3}}$$

Nie byłoby łatwo na to wpaść po prostu mnożąc przez siebie 6, 15 i 27 w różnych kombinacjach.

Przykład 1

Wiedząc, że $\log_3 20 = a$ i $\log_3 15 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 240$.

Przykład 1

Wiedząc, że $\log_3 20 = a$ i $\log_3 15 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 240$.

Musimy wyrazić 240 przy pomocy $20, 15$ i 3. Czasami nie jest to trudne, ale jeśli nie mamy pomysłu możemy postąpić następująco.
Rozkładamy wszystkie te liczby na czynniki pierwsze:

$$20 = 2^2 \times 5,$$
$$15 = 3 \times 5,$$
$$3 = 3,$$
$$240 = 2^4 \times 3 \times 5.$$

Przykład 1

Wiedząc, że $\log_3 20 = a$ i $\log_3 15 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 240$.

Musimy wyrazić 240 przy pomocy $20, 15$ i 3. Czasami nie jest to trudne, ale jeśli nie mamy pomysłu możemy postąpić następująco.
Rozkładamy wszystkie te liczby na czynniki pierwsze:

$$20 = 2^2 \times 5,$$
$$15 = 3 \times 5,$$
$$3 = 3,$$
$$240 = 2^4 \times 3 \times 5.$$

By otrzymać 240 musimy mieć 2^4. Potęgi dwójki uzyskamy tylko z 20, a więc możemy zacząć zapisywać $240 = 20^2 \times ...$, ale teraz w zapisie mamy już dwie potęgi 5, a chcemy tylko jedną, więc jednej trzeba się pozbyć. Potęga 5 występuje w 15, więc możemy zapisać $240 = 20^2 \times 15^{-1} \times ...$. Liczymy teraz potęgi 3. Mamy ich (-1), a chcemy mieć 1. Musimy więc pomnożyć jeszcze przez 3^2.

Przykład 1

Ostatecznie:

$$240 = 20^2 \times 15^{-1} \times 3^2$$

Przykład 1

Ostatecznie:

$$240 = 20^2 \times 15^{-1} \times 3^2$$

Teraz zapisanie logarytmu jest już proste:

$$\log_3 240 = \log_3(20^2 \times 15^{-1} \times 3^2) = 2a - b + 2$$

Przykłady 2

Wiedząc, że $\log_5 18 = a$ i $\log_5 10 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_5 1350$.

Przykłady 2

Wiedząc, że $\log_5 18 = a$ i $\log_5 10 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_5 1350$.

Zapisujemy

$$18 = 2 \times 3^2,$$

$$10 = 2 \times 5,$$

$$5 = 5,$$

$$1350 = 2 \times 3^3 \times 5^2.$$

Przykłady 2

Wiedząc, że $\log_5 18 = a$ i $\log_5 10 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_5 1350$.

Zapisujemy

$$18 = 2 \times 3^2,$$

$$10 = 2 \times 5,$$

$$5 = 5,$$

$$1350 = 2 \times 3^3 \times 5^2.$$

Zaczniemy od potęg 3, bo one występują tylko w 18. Musimy mieć 3^3, więc zaczynamy zapisywać $1350 = 18^{\frac{3}{2}} \times \ldots$. Dostajemy $2^{\frac{3}{2}}$, a chcemy mieć 2^1, korzystamy z 10 i zapisujemy $1350 = 18^{\frac{3}{2}} \times 10^{-\frac{1}{2}} \times \ldots$. Teraz 2 i 3 się zgadzają, ale mamy $5^{-\frac{1}{2}}$, a chcemy 5^2. Wykorzystujemy $5^{\frac{5}{2}}$

Przykład 2

Ostatecznie:

$$1350 = 18^{\frac{3}{2}} \times 10^{-\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{5}{2}}$$

Przykład 2

Ostatecznie:

$$1350 = 18^{\frac{3}{2}} \times 10^{-\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{5}{2}}$$

Czyli

$$\log_5 1350 = \log_5(18^{\frac{3}{2}} \times 10^{-\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{5}{2}}) = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{5}{2}$$

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_2 15 = a$ i $\log_2 40 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 0.8$.

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_2 15 = a$ i $\log_2 40 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 0.8$.

Tym razem musimy najpierw zmienić podstawę na 2,

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_2 15 = a$ i $\log_2 40 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 0.8$.

Tym razem musimy najpierw zmienić podstawę na 2, $\log_3 0.8 = \dfrac{\log_2 0.8}{\log_2 3}$.

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_2 15 = a$ i $\log_2 40 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 0.8$.

Tym razem musimy najpierw zmienić podstawę na 2, $\log_3 0.8 = \frac{\log_2 0.8}{\log_2 3}$.

Teraz naszym celem będzie zapisanie 0.8 oraz 3 przy pomocy $2, 15$ i 40.

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_2 15 = a$ i $\log_2 40 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 0.8$.

Tym razem musimy najpierw zmienić podstawę na 2, $\log_3 0.8 = \frac{\log_2 0.8}{\log_2 3}$.

Teraz naszym celem będzie zapisanie 0.8 oraz 3 przy pomocy $2, 15$ i 40.
Zacznijmy od 3.

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_2 15 = a$ i $\log_2 40 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 0.8$.

Tym razem musimy najpierw zmienić podstawę na 2, $\log_3 0.8 = \frac{\log_2 0.8}{\log_2 3}$.

Teraz naszym celem będzie zapisanie 0.8 oraz 3 przy pomocy $2, 15$ i 40. Zacznijmy od 3. Zapiszmy:

$$2 = 2,$$
$$15 = 3 \times 5,$$
$$40 = 2^3 \times 5,$$
$$3 = 3.$$

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_2 15 = a$ i $\log_2 40 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 0.8$.

Tym razem musimy najpierw zmienić podstawę na 2, $\log_3 0.8 = \dfrac{\log_2 0.8}{\log_2 3}$.

Teraz naszym celem będzie zapisanie 0.8 oraz 3 przy pomocy $2, 15$ i 40. Zacznijmy od 3. Zapiszmy:

$$
\begin{aligned}
2 &= 2, \\
15 &= 3 \times 5, \\
40 &= 2^3 \times 5, \\
3 &= 3.
\end{aligned}
$$

Oczywiście ta piewsza i ostatnia linijka jest mało pomocna. Potrzebujemy trójki więc musimy wykorzystać 15. Zaczynamy: $3 = 15 \times \ldots$.

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_2 15 = a$ i $\log_2 40 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 0.8$.

Tym razem musimy najpierw zmienić podstawę na 2, $\log_3 0.8 = \dfrac{\log_2 0.8}{\log_2 3}$.

Teraz naszym celem będzie zapisanie 0.8 oraz 3 przy pomocy $2, 15$ i 40. Zacznijmy od 3. Zapiszmy:

$$2 = 2,$$
$$15 = 3 \times 5,$$
$$40 = 2^3 \times 5,$$
$$3 = 3.$$

Oczywiście ta piewsza i ostatnia linijka jest mało pomocna. Potrzebujemy trójki więc musimy wykorzystać 15. Zaczynamy: $3 = 15 \times \ldots$. Teraz mamy nadprogramową 5, więc się jej pozbywamy: $3 = 15 \times 40^{-1} \times \ldots$.

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_2 15 = a$ i $\log_2 40 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 0.8$.

Tym razem musimy najpierw zmienić podstawę na 2, $\log_3 0.8 = \frac{\log_2 0.8}{\log_2 3}$.

Teraz naszym celem będzie zapisanie 0.8 oraz 3 przy pomocy $2, 15$ i 40. Zacznijmy od 3. Zapiszmy:

$$2 = 2,$$
$$15 = 3 \times 5,$$
$$40 = 2^3 \times 5,$$
$$3 = 3.$$

Oczywiście ta piewsza i ostatnia linijka jest mało pomocna. Potrzebujemy trójki więc musimy wykorzystać 15. Zaczynamy: $3 = 15 \times \ldots$. Teraz mamy nadprogramową 5, więc się jej pozbywamy: $3 = 15 \times 40^{-1} \times \ldots$. Teraz brakuje nam dwójek, ostatecznie: $3 = 15 \times 40^{-1} \times 2^3$.

Przykład 3

Teraz musimy jeszcze zapisać 0.8, ale to jest akurat dosyć proste.

Przykład 3

Teraz musimy jeszcze zapisać 0.8, ale to jest akurat dosyć proste.
Dysponujemy 2 i 40, a $0.8 = \frac{8}{10} = \frac{32}{40} = \frac{2^5}{40}$.

Przykład 3

Teraz musimy jeszcze zapisać 0.8, ale to jest akurat dosyć proste. Dysponujemy 2 i 40, a $0.8 = \frac{8}{10} = \frac{32}{40} = \frac{2^5}{40}$.

Czyli:

$$\log_3 0.8 = \frac{\log_2 0.8}{\log_2 3} = \frac{\log_2 \frac{15 \times 2^3}{40}}{\log_2 \frac{2^5}{40}} = \frac{a + 3 - b}{5 - b}$$

W razie jakichkolwiek pytań, można pisać na T.J.Lechowski@gmail.com lub na Teamsach.