8 ZADANIA DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA

bacz wód 241

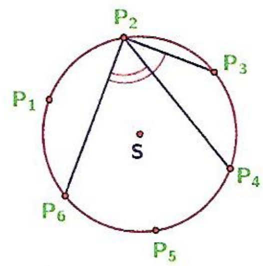
DOWÓD 269 | P

Dane są dwa niewspółśrodkowe okręgi, które przecinają się w punktach K i L. Odcinek AK jest średnicą pierwszego okręgu, a odcinek BK jest średnicą drugiego okręgu. Wykaż, że punkty A, L, B są współliniowe.

bacz wód 242

DOWÓD 270 | P

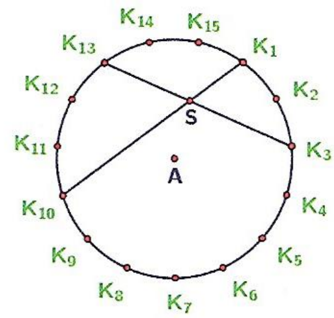
Okrąg o środku S podzielono punktami $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ na sześć równych łuków. Uzasadnij, że $|\sphericalangle P_6P_2P_4| = 2|\sphericalangle P_4P_2P_3|$.



bacz wód 243

DOWÓD 271 | R

Punkty $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_{14}, K_{15}$ dzielą okrąg o środku w punkcie A na 15 równych łuków (zobacz rysunek). Punkt S jest punktem przecięcia odcinków K_1K_{10} oraz K_3K_{13}. Wykaż, że $|\sphericalangle K_3SK_{10}| = 120°$.



bacz wód 244

DOWÓD 272 | P

W okrąg o promieniu r wpisano kwadrat $ABCD$. Punkt K leży na okręgu, ale nie jest wierzchołkiem kwadratu $ABCD$. Wykaż, że $|AK|^2 + |BK|^2 + |CK|^2 + |DK|^2 = 8r^2$.

bacz wód 245

DOWÓD 273 | P

Dany jest trapez prostokątny o podstawach AB i CD. Wykaż, że różnica kwadratów podstaw jest równa różnicy kwadratów przekątnych tego trapezu.

bacz wód 246

DOWÓD 274 | P

Dany jest prostokąt $ABCD$, gdzie $|AB| = a$ i $|BC| = b$. Wykaż, że odległość punktu A od przekątnej BD jest równa $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

bacz wód 247

DOWÓD 275 | R

W trapezie równoramiennym podstawy mają długości a i b. Uzasadnij, że pole koła wpisanego w ten trapez ma wartość $\frac{ab}{4}\pi$.

bacz wód 248

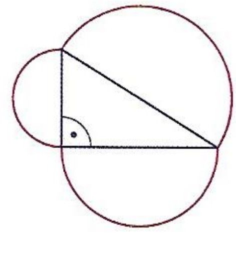
DOWÓD 276 | R

Dane są trzy okręgi o środkach S_1, S_2 i S_3, których stosunek długości promieni wynosi $1 : 2 : 3$. Każdy okrąg jest styczny zewnętrznie z pozostałymi dwoma okręgami. Wykaż, że trójkąt $S_1S_2S_3$ jest prostokątny.

bacz wód 249

DOWÓD 277 | P

Dany jest trójkąt prostokątny. Na każdym boku trójkąta zbudowano półkole (zobacz rysunek). Wykaż, że suma powierzchni obu półkoli zbudowanych na przyprostokątnych jest równa powierzchni półkola zbudowanego na przeciwprostokątnej.



bacz wód 250

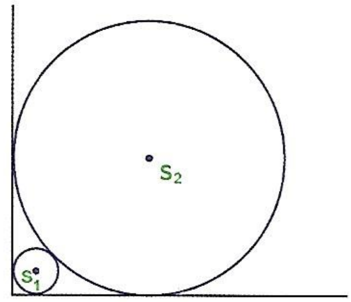
DOWÓD 278 | P

Wykaż, że suma pól księżyców Hipokratesa zbudowanych na bokach trójkąta równobocznego jest większa od pola tego trójkąta.

zobacz dowód 251

DOWÓD 279 | **R**

Dwa okręgi o środkach S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest jednocześnie styczny do ramion tego samego kąta prostego. Udowodnij, że stosunek promienia mniejszego z tych okręgów do promienia większego jest równy $3-2\sqrt{2}$.



zobacz dowód 252

DOWÓD 280 | **R**

W okrąg o promieniu R wpisano trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c. W trójkąt ten wpisano okrąg o promieniu $\frac{R}{2}$. Wykaż, że $R=\frac{a+b}{3}$.

zobacz dowód 253

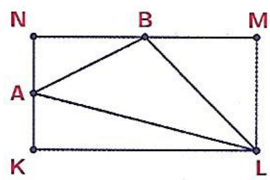
DOWÓD 281 | **R**

Na trójkącie prostokątnym opisano okrąg o promieniu R i w ten sam trójkąt wpisano okrąg o promieniu r. Wykaż, że wysokość trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną jest równa $\frac{2Rr+r^2}{R}$.

zobacz dowód 254

DOWÓD 282 | **P**

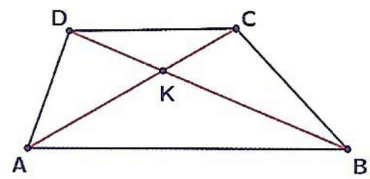
W prostokącie $KLMN$ punkt A jest środkiem boku KN, a punkt B środkiem boku NM (zobacz rysunek). Wykaż, że $P_{\triangle ABL}=P_{\triangle ABN}+P_{\triangle BLM}$.



zobacz dowód 255

DOWÓD 283 | **R**

Dany jest trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$. W trapezie poprowadzono przekątne przecinające się w punkcie K. Wiedząc, że $|AB|=12$, $|CD|=8$ oraz pole trójkąta CDK równe jest 16, wykaż, że trójkąty AKD i BKC mają równe pola o wartości 24.



zobacz dowód 256

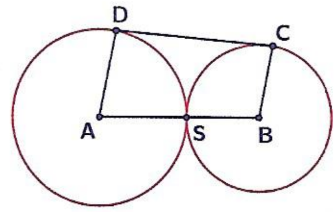
DOWÓD 284 | **P**

Z dwóch sąsiednich wierzchołków równoległoboku poprowadzono dwusieczne kątów. Wykaż, że dwusieczne te są prostopadłe.

zobacz dowód 257

DOWÓD 285 | **P**

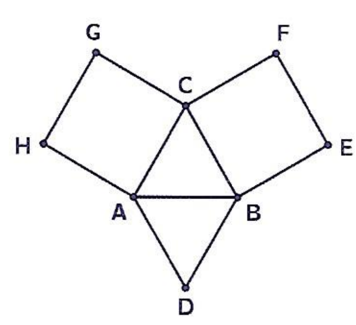
Dane są dwa okręgi o środkach w punktach A i B styczne w punkcie S oraz trapez $ABCD$, w którym $AD \parallel BC$ (zobacz rysunek). Wykaż, że kąt DSC jest kątem prostym.



zobacz dowód 258

DOWÓD 286 | **P**

Na kolejnych bokach trójkąta równobocznego ABC zbudowono trójkąt równoboczny ABD, kwadrat $BEFC$ oraz kwadrat $ACGH$. Wykaż, że kąt EDH jest kątem prostym.



zobacz dowód 259

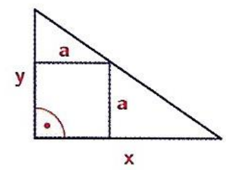
DOWÓD 287 | **R**

Udowodnij, że długość środkowej d trójkąta o bokach a, b, c opadającej na bok c można wyrazić wzorem $d=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2a^2-c^2}$.

zobacz dowód 260

DOWÓD 288 **P**

Dany jest trójkąt prostokątny o długościach przyprostokątnych x i y. W trójkąt wpisano kwadrat o boku a (zobacz rysunek). Wykaż, że $a = \frac{xy}{x+y}$.



zobacz dowód 261

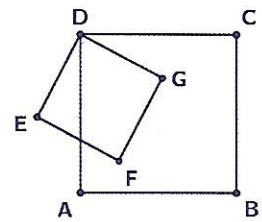
DOWÓD 289 **R**

Dany jest czworokąt $ABCD$, który nie ma par boków równoległych. Punkt K jest środkiem boku AB, a punkt L jest środkiem boku CD. Natomiast punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Wykaż, że $NL \parallel MK$.

zobacz dowód 262

DOWÓD 290 **P**

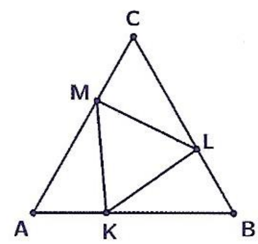
Dane są dwa różne kwadraty $ABCD$ oraz $DEFG$ o wspólnym wierzchołku D (zobacz rysunek). Wykaż, że $|AE| = |GC|$.



zobacz dowód 263

DOWÓD 291 **P**

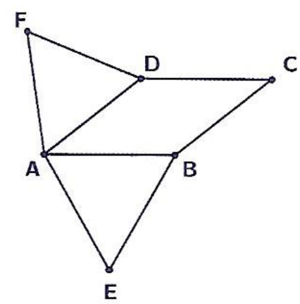
Na bokach trójkąta równobocznego ABC leżą punkty K, L, M w taki sposób, że punkt K leży na boku AB, punkt L leży na boku BC, a punkt M leży na boku AC oraz zachodzi równość $|AK| = |BL| = |CM|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt KLM jest równoboczny.



zobacz dowód 264

DOWÓD 292 **P**

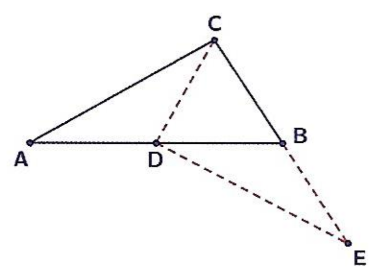
Dany jest równoległobok $ABCD$. Na boku AB oraz na boku AD zbudowano trójkąty równoboczne AEB i ADF (zobacz rysunek). Udowodnij, że trójkąt ECF jest równoboczny.



zobacz dowód 265

DOWÓD 293 **P**

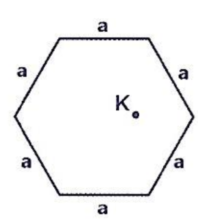
Dany jest trójkąt ABC, w którym punkt D jest środkiem boku AB oraz $|BC| = |DC|$. Bok BC przedłużono w ten sposób, że $|BE| = |BC|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $|AC| = |DE|$.



zobacz dowód 266

DOWÓD 294 **P**

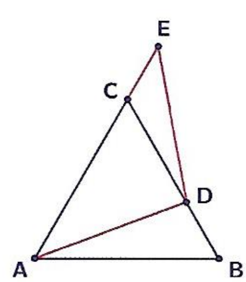
We wnętrzu sześciokąta foremnego o boku długości a umieszczono punkt K (zobacz rysunek). Wykaż, że suma wszystkich odległości punktu K od poszczególnych boków wynosi $3\sqrt{3}\,a$.



zobacz dowód 267

DOWÓD 295 **P**

Trójkąt ABC jest równoboczny. Na boku BC obrano punkt D oraz przedłużono bok AC do punktu E tak, że $|AD| = |DE|$. Wykaż, że $|BD| = |CE|$.

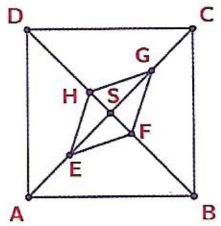


DOWÓD 296 **P**

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym o długościach przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej długości c, promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt można wyrazić wzorem $r = \frac{a+b-c}{2}$.

DOWÓD 297 **P**

Dany jest kwadrat $ABCD$. Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie S. Punkty E i G są środkami odcinków odpowiednio AS i SC, a punkty F i H leżą na przekątnej DB i spełniają warunki: $|DH| = 2|HS|$ i $|FB| = 2|SF|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $P_{ABCD} = 6P_{EFGH}$.



zobacz dowód 268

DOWÓD 298 **R**

Czworokąt $ABCD$ wpisano w okrąg. Dwusieczne tego czworokąta przecinają się w punktach $KLMN$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg.