6.59. Kąt α znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt $P(x, y)$ wybrano na końcowym ramieniu tego kąta w odległości r od punktu $O(0, 0)$. Oblicz współrzędne punktu P, jeśli wiadomo, że:

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha < 0$ i $r = \sqrt{13}$ b) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$, $\sin\alpha > 0$ i $r = 5$

c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{5}$, $\cos\alpha > 0$ i $r = \frac{\sqrt{29}}{5}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha > 0$ i $r = \frac{\sqrt{41}}{3}$.

6.60. Zbuduj w układzie współrzędnych kąt o mierze α, wiedząc, że:

a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{9}$ b) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = -7$

Rozważ dwa przypadki.

6.61. Zbuduj w układzie współrzędnych kąt o mierze α takiej, że:

a) $\sin\alpha = \frac{5}{6}$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$ b) $\cos\alpha = -\frac{2}{7}$ i $\operatorname{ctg}\alpha > 0$

c) $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{1}{3}$ i $\sin\alpha < 0$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{2}$ i $\cos\alpha > 0$.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

6.62. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°)$ oraz:

a) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ b) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$

6.63. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\alpha \in (90°, 180°)$ oraz:

a) $\sin\alpha = 0{,}8$ b) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = -7$

6.64. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°) \cup (90°, 180°)$ oraz:

a) $\sin\alpha = 0{,}5$ b) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\sin\alpha = 0{,}75$

6.65. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°) \cup (90°, 180°)$ oraz:

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ b) $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$ c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{11}{60}$

6.66. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że:

a) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ i $\alpha \in (180°, 270°)$
b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$ i $\alpha \in (270°, 360°)$
c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$ i $\alpha \in (180°, 270°)$
d) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ i $\alpha \in (270°, 360°)$.

6.67. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, wiedząc, że:

a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$
b) $\sin\alpha = -\frac{60}{61}$
c) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$
d) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{45}{28}$

6.68. Wiedząc, że:

a) $\sin\alpha = b$ i $\alpha \in (180°, 270°)$, $b \in (-1, 0)$
b) $\cos\alpha = a$ i $\alpha \in (270°, 360°)$, $a \in (0, 1)$,

oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

6.50. **6.69.** Zbadaj, czy istnieje kąt $\alpha \in (0°, 90°) \cup (90°, 180°)$, który spełnia następujące warunki:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ i $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$
b) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
c) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha = -2\sqrt{2}$
d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{6}$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

6.70. Czy $\sin\alpha$ może się równać:

a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
b) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$
c) $-\frac{1}{\sin\beta}$ dla pewnego kąta β
d) $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta$ dla pewnego kąta β?

6.71. Czy $\cos\alpha$ może się równać:

a) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$
b) $\frac{3}{\sqrt{10}}$
c) $\frac{1}{\sin\beta}$ dla pewnego kąta β
d) $\operatorname{tg}\beta$ dla pewnego kąta β?

6.51. **6.72.** Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{4\sin\alpha - 5\cos\alpha}{\cos\alpha + 3\sin\alpha}$, jeśli wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha = 5$
b) $\frac{-3\cos\alpha + 6\sin\alpha}{8\sin\alpha + 3\cos\alpha}$, jeśli wiadomo, że $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

6.52. **6.73.** Wiadomo, że α jest kątem rozwartym. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\cos\alpha - \sin^2\alpha$, jeśli $\cos^2\alpha = 0{,}81$
b) $2\cos\alpha + \sin\alpha$, jeśli $\sin^2\alpha = 0{,}25$
c) $\operatorname{tg}\alpha - 6\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\operatorname{tg}^2\alpha = 144$
d) $\frac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha}$, jeśli $\operatorname{ctg}^2\alpha = 100$.

6.74. Oblicz:

a) $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$ i $4\sin^2\alpha = 3\cos^2\alpha$,
b) $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (90°, 180°)$ i $5\cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha$,
c) $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (180°, 270°)$ i $9\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha = 2$,
d) $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (270°, 360°)$ i $4\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 3$.

6.75. Wykaż, że jeżeli liczby x i a są dodatnie, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $\sin\alpha = \sqrt{\frac{x}{x+a}}$ oraz $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{x}{a}}$, to $\alpha = \beta$.

6.76. Wiedząc, że α jest kątem rozwartym oraz $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{13}$, oblicz:

a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ b) $\sin\alpha - \cos\alpha$ c) $\sin\alpha, \cos\alpha$ d) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$

6.77. Wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz:

a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
b) $|\sin\alpha - \cos\alpha|$
c) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$
d) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

6.78. Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 4$, oblicz:

a) $|\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha|$
b) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$
c) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$
d) $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha$

6.79. Zapisz wyrażenia w prostszej postaci:

a) $\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$
b) $\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^3\alpha$
c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$
d) $\dfrac{1}{\sin\alpha} - \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$
e) $\cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$
f) $\sin\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$
g) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} \cdot (1 - \cos^2\alpha)$
h) $(\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha) \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

6.80. Sprawdź, czy podane równości są tożsamościami trygonometrycznymi, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°) \cup (90°, 180°)$:

a) $\sin\alpha \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha} = 1$
b) $\cos\alpha \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = 1$
c) $\sin\alpha + \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$
d) $\cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$
e) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = 1 + \operatorname{tg}\alpha$
f) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}\alpha)$
g) $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = 1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}$
h) $\dfrac{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha} = 1 + \dfrac{1}{\sin\alpha}$

i) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cdot (1+\operatorname{ctg}^2\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$

j) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot (1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

6.56. **6.81.** Sprawdź, czy podane równości są tożsamościami trygonometrycznymi, wiedząc, że $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ) \cup (90^\circ, 180^\circ)$:

a) $1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

b) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

c) $\sin\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right) = \cos^2\alpha$

d) $\cos\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = \sin^2\alpha$

e) $\dfrac{2}{\cos^2\alpha} - 1 = 1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha$

f) $\dfrac{2}{\sin^2\alpha} - 1 = 1 + 2\operatorname{ctg}^2\alpha$

g) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha} + \dfrac{1}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sin^2\alpha}$

h) $\dfrac{1}{1-\sin\alpha} + \dfrac{1}{1+\sin\alpha} = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}$

i) $1 - \sin\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$

j) $1 - \cos\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$

6.82. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$, to $\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = 0$.

6.83. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$,
to $\dfrac{1-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} + \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\sin\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Wzory redukcyjne

6.57. **6.84.** Oblicz, stosując wzory redukcyjne:

a) $\operatorname{tg} 43^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 47^\circ$

b) $\operatorname{ctg} 25^\circ \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 55^\circ \cdot \operatorname{ctg} 65^\circ$

c) $\sin^2 75^\circ + \sin^2 15^\circ - 2\sin 30^\circ$

d) $(\cos 52^\circ - \cos 38^\circ)^2 + 2\sin 38^\circ \cdot \sin 52^\circ + 2\cos 60^\circ$

6.58. **6.85.** Oblicz, stosując wzory redukcyjne:

a) $\sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$

b) $\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + \cos^2 135^\circ$

c) $(\cos 120^\circ - \operatorname{tg} 150^\circ)^2$

d) $(\sin 135^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ) \cdot (\cos 135^\circ - \operatorname{ctg} 150^\circ)$

6.43. **6.86.** Dane są liczby:

$$a = \sin 120^\circ + \cos 150^\circ - 2\text{tg}\, 45^\circ \qquad b = \left(\frac{\sin 60^\circ - 2\cos 135^\circ}{\text{tg}\, 120^\circ}\right)^2$$

$$c = (\cos 150^\circ + \sin 135^\circ)(\cos 30^\circ + \sin 45^\circ) \qquad d = \text{tg}\, 150^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 90^\circ$$

Która z nich jest liczbą wymierną?

6.44. **6.87.** Wykaż, że dana liczba jest wymierna:

a) $(2 + \cos 150^\circ)(2 + \sin 120^\circ)$
b) $(-\text{tg}\, 135^\circ + \text{tg}\, 150^\circ)(\text{tg}\, 45^\circ + \text{tg}\, 30^\circ)$
c) $\sin^2 135^\circ - 2\sin 135^\circ \cos 135^\circ + \cos^2 135^\circ$
d) $\text{tg}^2 120^\circ + 2\text{tg}\, 120^\circ \text{ctg}\, 150^\circ + \text{ctg}^2 150^\circ$

6.45. **6.88.** Porównaj liczby x i y, jeśli:

a) $x = \sin 135^\circ,\ y = \text{tg}^2 150^\circ$
b) $x = -\sqrt{3}\cos 120^\circ,\ y = \sin 120^\circ$
c) $x = \dfrac{1}{\text{ctg}\, 120^\circ},\ y = \dfrac{1}{\cos 135^\circ}$
d) $x = 4^{\sin 150^\circ},\ y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3\cos 120^\circ}$

6.89. Oblicz, bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora:

a) $4\sin(-420^\circ) \cdot \cos 690^\circ \cdot \text{ctg}\, 315^\circ$
b) $\cos 480^\circ \cdot \sin 540^\circ + \cos(-1080^\circ)$
c) $\sin^2 217^\circ + \cos^2 127^\circ + 2\sin 37^\circ \cdot \cos 487^\circ$
d) $\text{tg}\, 405^\circ + \text{ctg}\, 225^\circ - \sin 720^\circ$
e) $2\cos 120^\circ + 4\text{tg}\, 390^\circ \cdot \sin 120^\circ$
f) $-3\text{tg}(-45^\circ) \cdot \cos(-300^\circ) + \sin 150^\circ$
g) $\cos 210^\circ \cdot \text{ctg}\, 390^\circ - \sin 405^\circ \cdot \cos 675^\circ$
h) $\sin 30^\circ \cdot \text{tg}\, 225^\circ + (\sin 300^\circ)^2$

6.90. Wykaż, że prawdziwe są równości:

a) $\dfrac{\cos^2 112^\circ - \sin^2 382^\circ}{\text{tg}\, 128^\circ} = 0$
b) $2\sin 510^\circ \cdot \cos 300^\circ - \text{tg}\, 179^\circ \cdot \text{tg}\, 89^\circ = \dfrac{3}{2}$
c) $\sin^2 785^\circ + \sin^2 155^\circ - \text{tg}\, 198^\circ \cdot \text{tg}\, 108^\circ = 2$
d) $\text{ctg}\, 105^\circ \cdot \text{tg}\, 285^\circ + \sin^2 375^\circ + \sin^2 105^\circ = 2$

6.91. Oblicz, bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora:

a) $\cos 0^\circ + \sin 450^\circ - \sin 270^\circ - \text{tg}\, 360^\circ$
b) $\sin 180^\circ + \cos 450^\circ + \cos 540^\circ + \sin 630^\circ$
c) $\cos 720^\circ + \cos 900^\circ - \text{ctg}\, 270^\circ - \text{tg}\, 360^\circ$
d) $\text{tg}\, 360^\circ + \text{ctg}(-90^\circ) + \text{tg}\, 720^\circ$

6.92. Oblicz, bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora:

a) $\cos 0^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 90^\circ$

b) $\sin 36^\circ \cdot \sin 72^\circ \cdot \sin 108^\circ \cdot \sin 144^\circ \cdot \sin 180^\circ$

c) $\operatorname{ctg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ$

d) $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$

6.93. Oblicz, bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora:

a) $\dfrac{\cos 120^\circ \cdot \operatorname{ctg} 90^\circ + \operatorname{tg} 225^\circ \cdot \sin 510^\circ}{\operatorname{tg} 210^\circ \cdot \operatorname{ctg} 330^\circ + \cos 495^\circ \cdot \sin 405^\circ}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg} 690^\circ \cdot \cos 510^\circ - \sin 225^\circ \cdot \cos 495^\circ}{\sin 135^\circ \cdot \operatorname{ctg} 390^\circ + \operatorname{tg} 405^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ}$

c) $\dfrac{\cos 390^\circ \cdot \sin 240^\circ + \operatorname{tg} 315^\circ \cdot \cos 300^\circ}{\operatorname{ctg} 150^\circ \cdot \sin 120^\circ - \operatorname{tg} 420^\circ \cdot \cos(-450^\circ)}$

d) $\dfrac{\operatorname{tg} 315^\circ \cdot \operatorname{ctg}(-495^\circ) + \operatorname{ctg} 810^\circ \cdot \sin 930^\circ}{2\cos 1020^\circ \cdot \sin 810^\circ + \cos 1260^\circ \cdot \sin 630^\circ}$

6.94. Wyznacz α, $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ)$, wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 1$ i $\sin\alpha < 0$

b) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$

c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\alpha < 0$

d) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ i $\operatorname{ctg}\alpha > 0$

e) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin\alpha < 0$

f) $\sin\alpha = -1$ i $\cos\alpha = 0$

g) $\operatorname{ctg}\alpha = -1$ i $\sin\alpha > 0$

h) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\cos\alpha > 0$

i) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin\alpha < 0$

j) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ i $\sin\alpha > 0$.

6.61. **6.95.** Doprowadź poniższe wyrażenia do najprostszej postaci, wiedząc, że $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ) \cup (90^\circ, 180^\circ)$.

a) $\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(90^\circ + \alpha) - \cos^2(180^\circ - \alpha)$

b) $\sin(90^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)$

c) $\cos(90^\circ - \alpha) \cdot \sin(180^\circ - \alpha) - \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$

d) $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$

6.62. **6.96.** Wiadomo, że kąt α jest ostry i $\dfrac{3\sin\alpha}{\sin(90^\circ + \alpha)} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2$. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$.

6.63. **6.97.** Wiadomo, że kąt α jest ostry i $\dfrac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} + \dfrac{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)} = 3$. Wykaż, że: $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

6.98. Niech α, β, γ oznaczają miary kątów dowolnego trójkąta. Wykaż, że:

a) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2}$ b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$

6.99. Wykaż, że dla dowolnego kąta α, spełniającego warunek: $\alpha \neq 34^\circ + k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in C$, równość $\frac{\sin(146^\circ+\alpha)+\cos(304^\circ-\alpha)}{-\sin(326^\circ+\alpha)} = 2$ jest tożsamością.

6.100. Wykaż, że dla dowolnego kąta α, spełniającego warunek: $\alpha \neq 160^\circ + k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in C$, równość $\frac{\sin(200^\circ+\alpha)-3\cos(250^\circ-\alpha)}{\cos[90^\circ-(20^\circ+\alpha)]} = 2$ jest tożsamością.

6.101. Wykaż, że dla dowolnego kąta α, spełniającego warunek: $\alpha \neq k \cdot 45^\circ$, gdzie $k \in C$, równość $\frac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(180^\circ-\alpha)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)} = 1$ jest tożsamością.

6.102. Wykaż, że dla dowolnego kąta α, spełniającego warunek: $\alpha \neq k \cdot 90^\circ$, gdzie $k \in C$, równość $\frac{\cos^2(270^\circ-\alpha)}{\sin^{-2}(\alpha+90^\circ)-1} + \frac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\cos^{-2}(90^\circ-\alpha)-1} = 1$ jest tożsamością.

Twierdzenie sinusów

6.103. W trójkącie ABC mamy dane: $|BC| = 4$ cm i $|\sphericalangle BAC| = 150^\circ$. Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie.

6.104. W trójkącie ABC dane są miary kątów przy boku AB: 28° i 32°. Promień koła opisanego na trójkącie jest równy 8 cm. Oblicz długość boku AB.

6.105. W trójkącie ABC mamy dane: $|BC| = 5$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 48^\circ$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 70^\circ$. Oblicz długość boku AC. Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

6.106. W trójkącie ABC mamy dane: $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $|BC| = 8$ cm. Wyznacz długość boku AC.

6.107. Dwa boki trójkąta mają długość 13 cm i 21 cm, a cosinus kąta zawartego między tymi bokami wynosi $\frac{5}{13}$. Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $10\frac{5}{6}$ cm, oblicz sumę sinusów kątów w tym trójkącie.

6.108. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 3\sqrt{3}$, $|BC| = 3$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

6.109. W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| = 12$, $|BC| = 6\sqrt{2}$, $|AC| = 6(1 + \sqrt{3})$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

6.110. W trójkącie ostrokątnym ABC tangens kąta przy wierzchołku C jest równy $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, a bok przeciwległy temu kątowi ma długość 12 cm.

a) Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie.

b) W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AE i BF, które przecięły się w punkcie M. Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABM.

6.111. Dane są dwa trójkąty ABC oraz $A_1B_1C_1$ takie, że $\alpha = \alpha_1$ oraz $\beta + \beta_1 = 180°$. Wykaż, że $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|B_1C_1|}$.

6.112. Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC prawdziwa jest równość $\frac{|BC|}{|AC|} = \sqrt{2}$, to $\cos^2\alpha = 2\cos^2\beta - 1$.

6.113. Wykaż, że jeśli α, β są miarami dwóch kątów trójkąta, a R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie, to obwód trójkąta jest równy $2R \cdot [\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)]$.

6.114. Boki trójkąta mają długość a, b, c, natomiast miary kątów są odpowiednio równe α, β, γ. Wykaz, że jeśli $\frac{a}{c} \cdot \sin\alpha + \frac{b}{c} \cdot \sin\beta = \sin\gamma$, to trójkąt ten jest prostokątny.

Twierdzenie cosinusów

6.115. Wykaż, stosując twierdzenie cosinusów, że trójkąt o bokach długości:

a) 10 cm, 9 cm, 5 cm jest ostrokątny

b) $2\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{26}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm jest prostokątny

c) 4 cm, 10 cm, 12 cm jest rozwartokątny.

6.116. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 5$ cm. Oblicz cosinusy kątów tego trójkąta.

6.117. Oblicz długości przekątnych równoległoboku, którego boki mają długości 3 cm i 5 cm, a kąt ostry jest równy 30°.

6.118. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 2$, $|AC| = 4$ oraz sinus kąta BAC równy $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

a) Wykaż, że jeśli kąt BAC jest ostry, to trójkąt ABC jest równoramienny.

b) Oblicz długość boku BC w przypadku, gdy $|\sphericalangle BAC| \in (90°, 180°)$.

6.119. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm oraz $\sin|\sphericalangle ACB| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Oblicz obwód trójkąta oraz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

6.120. Długości boków trójkąta ABC są równe: $|AB| = \sqrt{14}$ cm, $|AC| = 3\sqrt{2}$ cm oraz $|BC| = \sqrt{2}$ cm. Wyznacz miarę kąta przy wierzchołku C.

6.121. Boki trójkąta ABC mają długość: $|BC| = 5$ cm, $|AB| = (2\sqrt{2} - 1)$ cm oraz $|AC| = (2\sqrt{2} + 1)$ cm. Oblicz miarę kąta przy wierzchołku A.

6.122. W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 7$ cm i $|AC| = 6$ cm. Oblicz długość środkowej CE.

6.123. W trójkącie ABC bok AB jest o 4 cm dłuższy od boku AC oraz $|BC| = 6$ cm. Wiedząc, że $|\sphericalangle ACB| = 120°$, oblicz obwód trójkąta ABC.

6.124. W trójkącie ABC bok AC jest o 6 cm dłuższy od boku AB, a $|BC| = 5\sqrt{2}$ cm. Wiedząc, że $|\sphericalangle ABC| = 135°$, oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

6.125. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 4$, $|BC| = |AB| - 2$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 60°$. Oblicz sinusy kątów CAB i ABC.

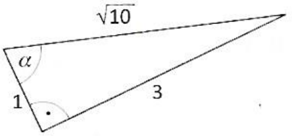
6.126. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC, $|AC|=|AB|$, poprowadzono środkowe CD i BE, które przecięły się w punkcie M. Wykaż, że $\cos(\sphericalangle DMB) = \frac{4}{5}$.

6.127. W trójkącie boki mają długość a, b, c, natomiast miary kątów są odpowiednio równe α, β, γ. Wykaż, że jeśli $a \cdot \cos\beta = b \cdot \cos\alpha$, to trójkąt ten jest równoramienny.

6.128. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt M taki, że $|BM| = \frac{1}{3}|MC|$. Wykaż, że sinus kąta CAM jest równy $\frac{3\sqrt{39}}{26}$.

Test sprawdzający do rozdziału 6.

1. Wykorzystując dane na rysunku obok, możemy stwierdzić, że:



A. $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ B. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

C. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ D. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

2. Wiadomo, że $\cos\alpha = \frac{1}{4}$. Wówczas $\sin(90° - \alpha)$ wynosi:

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{16}$.

3. Tangens kąta ostrego β jest równy $\frac{3}{2}$. Z tego wynika, że β należy do przedziału:

A. $(0°, 30°)$ B. $(30°, 45°)$ C. $(45°, 60°)$ D. $(60°, 90°)$.

4. Wiadomo, że γ jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym i $\sin\gamma = 0{,}9$. Z tego wynika, że:

A. $\gamma \in (0°, 30°)$ B. $\gamma \in (30°, 45°)$ C. $\gamma \in (45°, 60°)$ D. $\gamma \in (60°, 90°)$.

5. Wiadomo, że γ jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym i $\cos\gamma = 0{,}9$. Z tego wynika, że:

A. $\gamma \in (0°, 30°)$ B. $\gamma \in (30°, 45°)$ C. $\gamma \in (45°, 60°)$ D. $\gamma \in (60°, 90°)$.

6. O kącie ostrym γ wiadomo, że $\sin\gamma = \cos\gamma$. Zatem γ ma miarę:

A. 60° B. 45° C. 30° D. mniejszą niż 25°.

7. Wiadomo, że β jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\beta = 3$. Wówczas wartość wyrażenia $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)^2$ jest równa:

A. 1 B. $3\frac{1}{3}$ C. $9\frac{1}{9}$ D. $11\frac{1}{9}$.

8. Wartość wyrażenia $\cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 60°$ jest równa:

A. 1,25 B. 1 C. 1,75 D. 0,75.

9. Wartość wyrażenia $\operatorname{ctg} 30° \cdot \operatorname{ctg} 40° \cdot \operatorname{ctg} 50°$ jest równa:

A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2}$.

10. Kąt α znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt $P(-5, 12)$ należy do drugiego ramienia tego kąta. Zatem:

A. $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ B. $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ C. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ D. $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$.

11. Wartość wyrażenia $(\sin 134^\circ - \cos 44^\circ)^2$ wynosi:

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $1\frac{1}{2}$.

12. Kąt α jest kątem ostrym. Wyrażenie $\cos(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ + \alpha) + 1$ jest równe:

A. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 1$ B. 2 C. $\cos^2\alpha + 1$ D. $\sin^2\alpha$.

13. Wiadomo, że $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ i $\cos^2\alpha = \frac{4}{9}$. Zatem:

A. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{5}{6}$ B. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{6}{5}$ C. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = -\frac{6}{5}$ D. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = -\frac{5}{6}$.

14. Wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Zatem wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}{2\cos\alpha}$ wynosi:

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2.

15. Liczba $a = \log_{\frac{3}{4}} \sin 120^\circ$ jest:

A. parzysta B. nieparzysta C. pierwsza D. wymierna.

16. Liczby $a = 4^{\cos 120^\circ}$ oraz $b = \operatorname{tg} 135^\circ$ spełniają warunek:

A. $a^2 + b^2 = 5$ B. $a = 1 - b$ C. $a^b = 2$ D. $\frac{a}{b} = 2$.

17. Jeśli $\alpha = 150^\circ$, to prawdziwa jest równość:

A. $\sqrt{3} \cdot \cos\alpha + \sin\alpha = 0$ B. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

C. $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{4}$ D. $\frac{\sin\alpha + 0{,}5}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

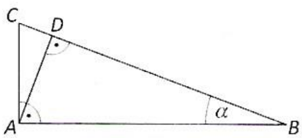
18. Wyrażenie $\cos^3\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równe:

A. 1 B. $\cos\alpha$ C. $\sin\alpha$ D. 0.

19. Punkt A leży na jednym ramieniu kąta o mierze 60°, w odległości 1 dm od wierzchołka tego kąta. Odległość punktu A od drugiego ramienia tego kąta wynosi:

A. 1 dm B. $\sqrt{3}$ dm C. 20 cm D. $5\sqrt{3}$ cm.

20. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość AD na przeciwprostokątną BC (zobacz rysunek obok). Jeśli $|CD| = 1$ i $|DB| = 4$, to tangens kąta ostrego α wynosi:



A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{3}$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

6.71. **6.129.** W trójkącie prostokątnym a, b oznaczają długości przyprostokątnych, c jest długością przeciwprostokątnej, α oznacza miarę kąta leżącego naprzeciw przyprostokątnej długości a. Wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, oblicz:

a) $\sin\alpha$
b) wartość wyrażenia $\frac{a^2}{2b^2 + c^2}$.

6.68. **6.130.** Kąt α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha + \cos\alpha = 1\frac{1}{4}$. Oblicz:

a) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$
b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

6.69. **6.131.** Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2{,}5$. Oblicz:

a) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$
b) $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha$

6.70. **6.132.** Suma sinusów kątów ostrych w pewnym trójkącie prostokątnym jest równa $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Oblicz:

a) iloczyn sinusów tych kątów
b) iloczyn cosinusów tych kątów.

6.74. **6.133.** Porównaj liczby: $a = 10^{\log\sin 45^\circ}$ i $b = \sin^3 150^\circ + \sin 30^\circ \cos^2 150^\circ$.

6.75. **6.134.** Uzasadnij, że jeśli $a = 3\sqrt[4]{9^{\cos 120^\circ}}$ i $b = \left(\sqrt{\operatorname{tg} 30^\circ}\right)^3$, to $a \cdot b = 1$.

6.76. **6.135.** Podaj miarę kąta rozwartego α, jeśli wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$.

6.77. **6.136.** Wykaż, że jeśli $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, to $(2|\cos\alpha| + 1)(2\cos\alpha + 1) + 3 = 4\sin^2\alpha$.

6.78. **6.137.** Wiedząc, że α jest miarą kąta rozwartego i $\sin\alpha = 16^{-\frac{1}{4}}$, wyznacz liczbę m, dla której $(m-1)\cos^2\alpha = m + \operatorname{tg}\alpha$.

6.79. **6.138.** Wykaż, że jeśli α jest kątem ostrym i $2\cos^2\alpha + 5\sin^2\alpha = 4$, to $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 4{,}5$.

6.88. **6.139.** Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego α wartość wyrażenia

$$\left(\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \frac{1-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\right) \cdot \cos\alpha$$

jest stała.

6.140. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (180°, 270°)$, to $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = -2\mathrm{tg}\,\alpha$.

6.141. Oblicz wartość wyrażenia: $\sin(-1320°) \cdot \mathrm{tg}\, 840° + \cos(-2100°)$.

6.142. Podaj miarę kąta α, wiedząc, że:

a) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \mathrm{tg}\,\alpha = 1$ i $\alpha \in (180°, 270°)$

b) $\log_3 \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (180°, 270°)$

c) $\log_{16} \sin\alpha = -\frac{1}{4}$ i $\alpha \in (90°, 180°)$

d) $\log_{\frac{3\sqrt{3}}{8}} \cos\alpha = \frac{1}{3}$ i $\alpha \in (270°, 360°)$.

6.143. Oblicz wartość wyrażenia:

$\log(\mathrm{tg}\,181°) + \log(\mathrm{tg}\,182°) + \log(\mathrm{tg}\,183°) + \ldots + \log(\mathrm{tg}\,267°) + \log(\mathrm{tg}\,268°) + \log(\mathrm{tg}\,269°)$

6.144. W kąt o mierze 60° wpisano dwa okręgi styczne do ramion kąta i styczne zewnętrznie do siebie. Wyznacz długość promienia większego okręgu, jeżeli promień mniejszego okręgu ma długość r.

6.145. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 7{,}5$ cm i $|AC| = 6$ cm.

a) Oblicz długość środkowej trójkąta poprowadzonej na bok AB.

b) Oblicz promień koła opisanego na trójkącie ABC.

6.146. W trójkącie ABC bok BC ma długość 16 cm, a $|\sphericalangle ACB| = 120°$. Wiedząc, że promień koła opisanego na tym trójkącie jest równy 16 cm, oblicz:

a) miary pozostałych kątów trójkąta ABC

b) obwód trójkąta ABC

c) wysokość poprowadzoną z wierzchołka C

d) długość środkowej poprowadzonej na bok BC.

6.147. W trójkącie rozwartokątnym ABC dane są długości boków: $|AB| = 3\sqrt{2}$, $|BC| = 3 - \sqrt{3}$, $|AC| = 2\sqrt{3}$.

a) Wyznacz miarę kąta ACB.

b) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.