Równania i nierówności liniowe z parametrem

Wprowadzenie

Na prezentacji omówimy kilka przykładów podobnych do tych z ostatnich zajęć.

Równania - rozgrzewka

Rozwiąż równanie:

$$2x + 7 = \sqrt{3}x + 11$$

Równania - rozgrzewka

Rozwiąż równanie:

$$2x + 7 = \sqrt{3}x + 11$$

Przeniesiemy x na jedną stronę, resztę na drugą:

$$2x - \sqrt{3}x = 4$$

Równania - rozgrzewka

Rozwiąż równanie:

$$2x + 7 = \sqrt{3}x + 11$$

Przeniesiemy x na jedną stronę, resztę na drugą:

$$2x - \sqrt{3}x = 4$$

Wyciągamy x przed nawias:

$$x(2 - \sqrt{3}) = 4$$

Równania - rozgrzewka

Rozwiąż równanie:

$$2x + 7 = \sqrt{3}x + 11$$

Przeniesiemy x na jedną stronę, resztę na drugą:

$$2x - \sqrt{3}x = 4$$

Wyciągamy x przed nawias:

$$x(2 - \sqrt{3}) = 4$$

Dzielimy przez nawias i otrzymujemy (jeszcze można usunąć niewymierność z mianownika):

$$x = \frac{4}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4-3} = 8 + 4\sqrt{3}$$

Równania - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2x + 7 = ax + 11$$

Równania - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2x + 7 = ax + 11$$

Robimy to samo, co poprzednio:

$$2x - ax = 4$$

Równania - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2x + 7 = ax + 11$$

Robimy to samo, co poprzednio:

$$2x - ax = 4$$

$$x(2 - a) = 4$$

Równania - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2x + 7 = ax + 11$$

Robimy to samo, co poprzednio:

$$2x - ax = 4$$

$$x(2 - a) = 4$$

$$x = \frac{4}{2 - a}$$

Jest tylko jeden problem.

Równania - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2x + 7 = ax + 11$$

Robimy to samo, co poprzednio:

$$2x - ax = 4$$

$$x(2 - a) = 4$$

$$x = \frac{4}{2 - a}$$

Jest tylko jeden problem. Co jeśli $a = 2$?

Równania - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2x + 7 = ax + 11$$

Robimy to samo, co poprzednio:

$$2x - ax = 4$$

$$x(2 - a) = 4$$

$$x = \frac{4}{2 - a}$$

Jest tylko jeden problem. Co jeśli $a = 2$? Wtedy nie możemy wykonać ostatniego kroku (nie możemy dzielić przez 0).

Równania - przykład 1

Rozwiąż równanie:

$$2x + 7 = ax + 11$$

Robimy to samo, co poprzednio:

$$2x - ax = 4$$

$$x(2 - a) = 4$$

$$x = \frac{4}{2 - a}$$

Jest tylko jeden problem. Co jeśli $a = 2$? Wtedy nie możemy wykonać ostatniego kroku (nie możemy dzielić przez 0). Przeanalizujmy przypadek, gdy $a = 2$ osobno.

Równania - przykład 1

Jeśli $a = 2$ to nasze równanie staje się:

$$2x + 7 = 2x + 11$$

Równania - przykład 1

Jeśli $a = 2$ to nasze równanie staje się:

$$2x + 7 = 2x + 11$$

Otrzymujemy

$$7 = 11$$

To sprzeczność.

Równania - przykład 1

Jeśli $a = 2$ to nasze równanie staje się:

$$2x + 7 = 2x + 11$$

Otrzymujemy

$$7 = 11$$

To sprzeczność. Czyli jeśli $a = 2$, to nie ma rozwiązań.

Równania - przykład 1

Jeśli $a = 2$ to nasze równanie staje się:

$$2x + 7 = 2x + 11$$

Otrzymujemy

$$7 = 11$$

To sprzeczność. Czyli jeśli $a = 2$, to nie ma rozwiązań.

Możemy podsumować to rozwiązanie:

Równania - przykład 1

Jeśli $a = 2$ to nasze równanie staje się:

$$2x + 7 = 2x + 11$$

Otrzymujemy

$$7 = 11$$

To sprzeczność. Czyli jeśli $a = 2$, to nie ma rozwiązań.

Możemy podsumować to rozwiązanie:
Jeśli $a \neq 2$, to mamy jedno rozwiązanie: $x = \dfrac{4}{2-a}$. Jeśli $a = 2$, to równanie nie ma rozwiązań (jest sprzeczne).

Równania - przykład 2

Rozwiążmy:

$$m^2x - m = 4x + 2$$

Równania - przykład 2

Rozwiążmy:

$$m^2x - m = 4x + 2$$

Zaczynamy standardowo:

$$m^2x - 4x = 2 + m$$

Równania - przykład 2

Rozwiążmy:

$$m^2x - m = 4x + 2$$

Zaczynamy standardowo:

$$m^2x - 4x = 2 + m$$

$$x(m^2 - 4) = m + 2$$

Równania - przykład 2

Rozwiążmy:

$$m^2x - m = 4x + 2$$

Zaczynamy standardowo:

$$m^2x - 4x = 2 + m$$

$$x(m^2 - 4) = m + 2$$

$$x = \frac{m+2}{m^2-4} = \frac{m+2}{(m+2)(m-2)} = \frac{1}{m-2}$$

Równania - przykład 2

Rozwiążmy:

$$m^2x - m = 4x + 2$$

Zaczynamy standardowo:

$$m^2x - 4x = 2 + m$$

$$x(m^2 - 4) = m + 2$$

$$x = \frac{m+2}{m^2-4} = \frac{m+2}{(m+2)(m-2)} = \frac{1}{m-2}$$

Jednak w pewnym momencie podzieliliśmy przez $m^2 - 4$. Możemy tak zrobić tylko, jeśli $m \neq 2$ i $m \neq -2$ (w innym przypadku mielibyśmy dzielenie przez 0).

Równania - przykład 2

Co jeśli $m = 2$?

Równania - przykład 2

Co jeśli $m = 2$? Wtedy nasze równanie przyjmuje postać:

$$4x - 2 = 4x + 2$$

Równania - przykład 2

Co jeśli $m = 2$? Wtedy nasze równanie przyjmuje postać:

$$4x - 2 = 4x + 2$$

To daje:

$$-2 = 2$$

Równania - przykład 2

Co jeśli $m = 2$? Wtedy nasze równanie przyjmuje postać:

$$4x - 2 = 4x + 2$$

To daje:

$$-2 = 2$$

Sprzeczność. Nie ma rozwiązań!

Równania - przykład 2

A co jeśli $m = -2$?

Równania - przykład 2

A co jeśli $m = -2$? Wtedy otzymujemy:

$$4x + 2 = 4x + 2$$

Równania - przykład 2

A co jeśli $m = -2$? Wtedy otzymujemy:

$$4x + 2 = 4x + 2$$

Czyli:

$$2 = 2$$

Równania - przykład 2

A co jeśli $m = -2$? Wtedy otzymujemy:

$$4x + 2 = 4x + 2$$

Czyli:

$$2 = 2$$

Tożsamość, to jest prawdziwe dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Mamy nieskończenie wiele rozwiązań.

Równania - przykład 2

Ostatecznie:

- jeśli $m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, to mamy jedno rozwiązanie: $x = \dfrac{1}{m-2}$,

Równania - przykład 2

Ostatecznie:

- jeśli $m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, to mamy jedno rozwiązanie: $x = \dfrac{1}{m-2}$,
- jeśli $m = 2$, to otrzymujemy równanie sprzeczne, czyli brak rozwiązań,

Równania - przykład 2

Ostatecznie:

- jeśli $m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, to mamy jedno rozwiązanie: $x = \dfrac{1}{m-2}$,
- jeśli $m = 2$, to otrzymujemy równanie sprzeczne, czyli brak rozwiązań,
- jeśli $m = -2$, to otrzymujemy równanie tożsamościowe, czyli nieskończenie wiele rozwiązań.

Nierówności - rozgrzewka

Rozwiąż:

$$2x - 3 > \sqrt{5}x + 2$$

Nierówności - rozgrzewka

Rozwiąż:

$$2x - 3 > \sqrt{5}x + 2$$

Przenosimy:

$$2x - \sqrt{5}x > 5$$

Nierówności - rozgrzewka

Rozwiąż:

$$2x - 3 > \sqrt{5}x + 2$$

Przenosimy:

$$2x - \sqrt{5}x > 5$$

Wyciągamy przed nawias:

$$x(2 - \sqrt{5}) > 5$$

Nierówności - rozgrzewka

Rozwiąż:

$$2x - 3 > \sqrt{5}x + 2$$

Przenosimy:

$$2x - \sqrt{5}x > 5$$

Wyciągamy przed nawias:

$$x(2 - \sqrt{5}) > 5$$

Dzielimy

Nierówności - rozgrzewka

Rozwiąż:

$$2x - 3 > \sqrt{5}x + 2$$

Przenosimy:

$$2x - \sqrt{5}x > 5$$

Wyciągamy przed nawias:

$$x(2 - \sqrt{5}) > 5$$

Dzielimy, ale uwaga! $2 - \sqrt{5}$ jest mniejsze od 0, więc otrzymujemy (daruję już sobie niewymierność w mianowniku):

$$x < \frac{5}{2 - \sqrt{5}}$$

Nierówności - przykład

Rozwiąż:

$$|m-3|x+4 \geqslant x-4$$

Nierówności - przykład

Rozwiąż:

$$|m-3|x+4 \geqslant x-4$$

Przenosimy:

$$|m-3|x-x \geqslant -8$$

Nierówności - przykład

Rozwiąż:

$$|m-3|x+4 \geqslant x-4$$

Przenosimy:

$$|m-3|x-x \geqslant -8$$

Wyciągamy przed nawias:

$$x(|m-3|-1) > -8$$

Nierówności - przykład

Rozwiąż:

$$|m-3|x+4 \geqslant x-4$$

Przenosimy:

$$|m-3|x-x \geqslant -8$$

Wyciągamy przed nawias:

$$x(|m-3|-1) > -8$$

Chcemy podzielić, ale skąd wiadomo jaki znak ma $|m-3|-1$.

Nierówności - przykład

Rozwiąż:

$$|m-3|x+4 \geqslant x-4$$

Przenosimy:

$$|m-3|x-x \geqslant -8$$

Wyciągamy przed nawias:

$$x(|m-3|-1) > -8$$

Chcemy podzielić, ale skąd wiadomo jaki znak ma $|m-3|-1$. Musimy się przyjrzeć temu wyrażeniu.

Nierówności - przykład

Rozwiążmy:

$$|m-3|-1<0$$

Nierówności - przykład

Rozwiążmy:

$$|m - 3| - 1 < 0$$

Czyli:

$$|m - 3| < 1$$

Nierówności - przykład

Rozwiążmy:

$$|m - 3| - 1 < 0$$

Czyli:

$$|m - 3| < 1$$

Co daje:

$$-1 < m - 3 < 1$$

Nierówności - przykład

Rozwiążmy:

$$|m-3|-1<0$$

Czyli:

$$|m-3|<1$$

Co daje:

$$-1<m-3<1$$

Czyli:

$$2<m<4$$

.

Nierówności - przykład

Rozwiążmy:

$$|m-3|-1<0$$

Czyli:

$$|m-3|<1$$

Co daje:

$$-1<m-3<1$$

Czyli:

$$2<m<4$$

.

A więć, jeśli $2<m<4$, to wyrażenie $|m-3|-1$ jest ujemne.

Nierówności - przykład

Rozwiążmy:

$$|m-3|-1<0$$

Czyli:

$$|m-3|<1$$

Co daje:

$$-1<m-3<1$$

Czyli:

$$2<m<4$$

.

A więć, jeśli $2<m<4$, to wyrażenie $|m-3|-1$ jest ujemne. Łatwo zobaczyć, że jeśli $m=2$ lub $m=4$, to to wyrażenie wynosi 0, natomiast, gdy $m<2$ lub $m>4$, to jest ono dodatnie.

Nierówności - przykład

Wróćmy do:

$$x(|m-3|-1) > -8$$

Jeśli $m = 2$ lub $m = 4$, to w nawiasie jest 0 i otrzymujemy:

$$0 > -8$$

a to jest prawdziwe dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Nierówności - przykład

Wróćmy do:

$$x(|m-3|-1) > -8$$

Jeśli $m = 2$ lub $m = 4$, to w nawiasie jest 0 i otrzymujemy:

$$0 > -8$$

a to jest prawdziwe dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Jeśli $2 < m < 4$, to dzielimy przez coś ujemnego, czyli dostaniemy:

$$x < \frac{-8}{|m-3|-1}$$

A więc $x \in (-\infty, \frac{-8}{|m-3|-1})$.

Nierówności - przykład

Wróćmy do:

$$x(|m-3|-1) > -8$$

Jeśli $m = 2$ lub $m = 4$, to w nawiasie jest 0 i otrzymujemy:

$$0 > -8$$

a to jest prawdziwe dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Jeśli $2 < m < 4$, to dzielimy przez coś ujemnego, czyli dostaniemy:

$$x < \frac{-8}{|m-3|-1}$$

A więc $x \in (-\infty, \frac{-8}{|m-3|-1})$. Natomiast jeśli $m < 2$ lub $m > 4$, to dzielimy przez coś dodatniego, a więc otrzymamy:

$$x > \frac{-8}{|m-3|-1}$$

Czyli $x \in (\frac{-8}{|m-3|-1}, \infty)$

Na kartkówce mogą się pojawić zadania z tych tematów, ale większość będzie z wartości bezwzględnej.