

Powtórzenie przekształceń 2

Wprowadzenie

Na prezentacji omówimy rysowanie wykresów wybranych funkcji wykorzystując wszystkie poznane przekształcenia. Proszę dokładnie przeanalizować wszystkie przykłady.

Wprowadzenie

Na prezentacji omówimy rysowanie wykresów wybranych funkcji wykorzystując wszystkie poznane przekształcenia. Proszę dokładnie przeanalizować wszystkie przykłady.

Najlepiej najpierw samemu spróbować, a dopiero później sprawdzić rozwiązanie na kolejnych slajdach.

Przykład 1

Narysujemy wykres $f(x) = 2\sqrt{4 - |x|}$.

Przykład 1

Narysujemy wykres $f(x) = 2\sqrt{4 - |x|}$.

Zacniemy od wykresu $y = \sqrt{x}$ i zapiszemy kolejne przekształcenia, które doprowadzą nas do wykresu $y = 2\sqrt{4 - |x|}$.

Przykład 1

Narysujemy wykres $f(x) = 2\sqrt{4 - |x|}$.

Zacniemy od wykresu $y = \sqrt{x}$ i zapiszemy kolejne przekształcenia, które doprowadzą nas do wykresu $y = 2\sqrt{4 - |x|}$.

$$\sqrt{x} \xrightarrow{T_{[-4,0]}} \sqrt{x+4} \xrightarrow{S_{0y}} \sqrt{-x+4} \xrightarrow{f(|x|)} \sqrt{-|x|+4} \xrightarrow{2f(x)} 2\sqrt{-|x|+4}$$

Przykład 1

Narysujemy wykres $f(x) = 2\sqrt{4 - |x|}$.

Zacniemy od wykresu $y = \sqrt{x}$ i zapiszemy kolejne przekształcenia, które doprowadzą nas do wykresu $y = 2\sqrt{4 - |x|}$.

$$\sqrt{x} \xrightarrow{T_{[-4,0]}} \sqrt{x+4} \xrightarrow{S_{OY}} \sqrt{-x+4} \xrightarrow{f(|x|)} \sqrt{-|x|+4} \xrightarrow{2f(x)} 2\sqrt{-|x|+4}$$

Czyli wykres $y = \sqrt{x}$ najpierw przesuwamy od 4 jednostki w lewo, później odbijamy względem osi OY , następnie prawa część wykresu pozostaje bez zmian, a lewa jest jej odbiciem i ostatecznie przysttko rozciągamy w pionie względem osi OX dwukrotnie.

Przykład 1

Narysujemy wykres $f(x) = 2\sqrt{4 - |x|}$.

Zacniemy od wykresu $y = \sqrt{x}$ i zapiszemy kolejne przekształcenia, które doprowadzą nas do wykresu $y = 2\sqrt{4 - |x|}$.

$$\sqrt{x} \xrightarrow{T_{[-4,0]}} \sqrt{x+4} \xrightarrow{S_{OY}} \sqrt{-x+4} \xrightarrow{f(|x|)} \sqrt{-|x|+4} \xrightarrow{2f(x)} 2\sqrt{-|x|+4}$$

Czyli wykres $y = \sqrt{x}$ najpierw przesuwamy od 4 jednostki w lewo, później odbijamy względem osi OY , następnie prawa część wykresu pozostaje bez zmian, a lewa jest jej odbiciem i ostatecznie przysttko rozciągamy w pionie względem osi OX dwukrotnie.

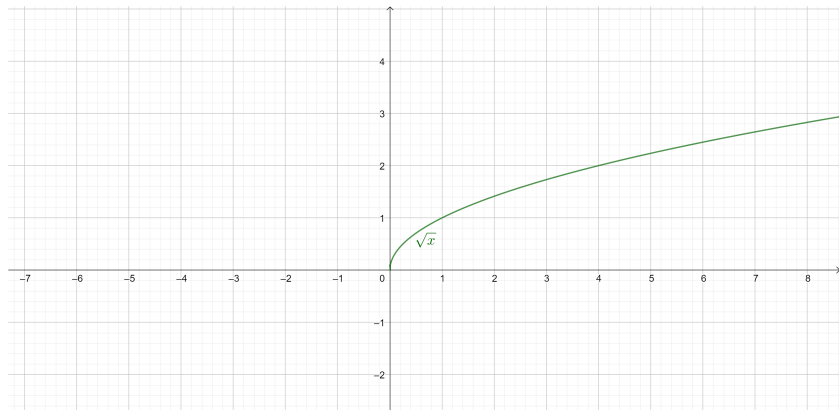
Na następnych slajdach będę wykresy kolejnych etapów przekształceń.

Przykład 1

Zaczynamy od $y = \sqrt{x}$.

Przykład 1

Zaczynamy od $y = \sqrt{x}$.

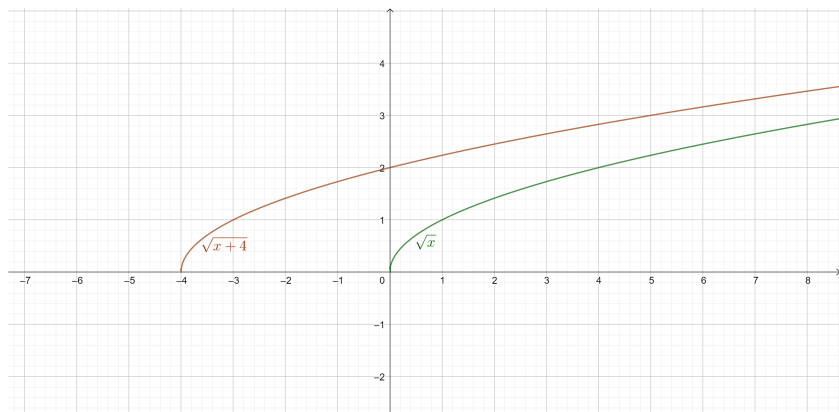


Przykład 1

$$\sqrt{x} \xrightarrow{T_{[-4,0]}} \sqrt{x+4}$$

Przykład 1

$$\sqrt{x} \xrightarrow{T_{[-4,0]}} \sqrt{x+4}$$

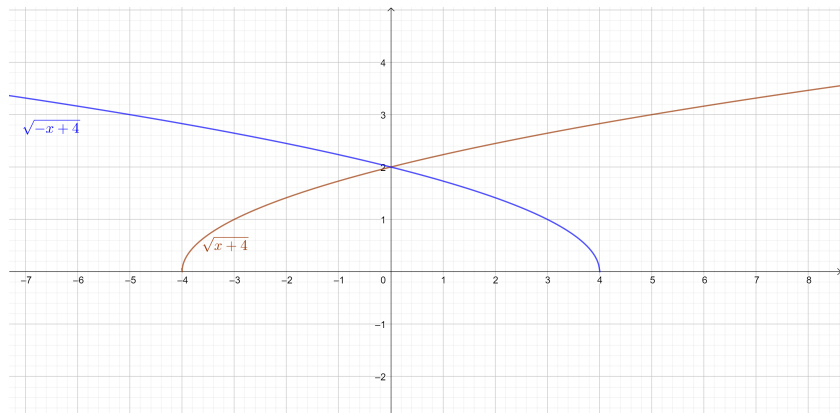


Przykład 1

$$\sqrt{x+4} \xrightarrow{Soy} \sqrt{-x+4}$$

Przykład 1

$$\sqrt{x+4} \xrightarrow{S_{OY}} \sqrt{-x+4}$$

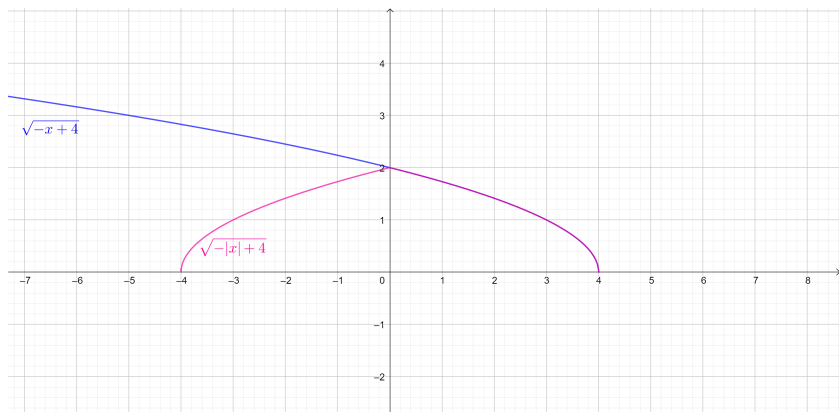


Przykład 1

$$\sqrt{-x + 4} \xrightarrow{f(|x|)} \sqrt{-|x| + 4}$$

Przykład 1

$$\sqrt{-x+4} \xrightarrow{f(|x|)} \sqrt{-|x|+4}$$

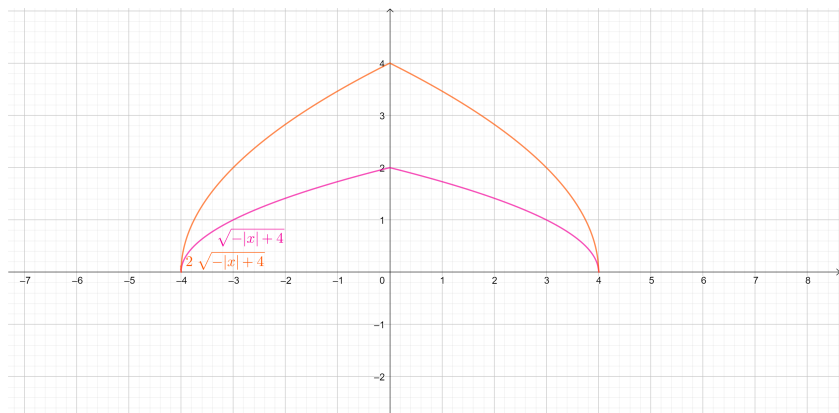


Przykład 1

$$\sqrt{-|x| + 4} \xrightarrow{2f(x)} 2\sqrt{-|x| + 4}$$

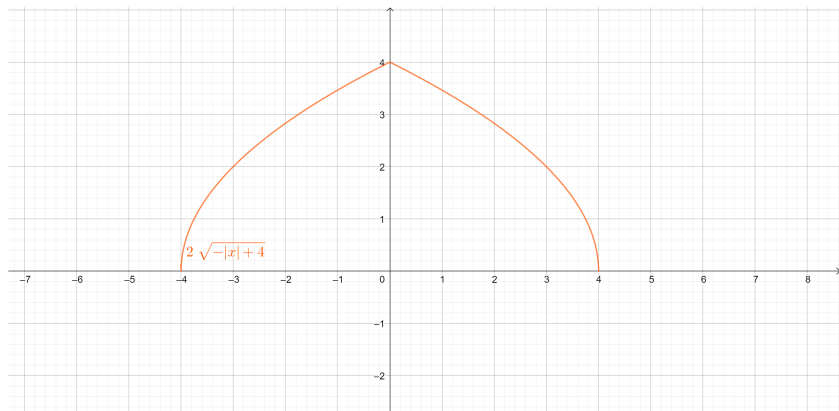
Przykład 1

$$\sqrt{-|x| + 4} \xrightarrow{2f(x)} 2\sqrt{-|x| + 4}$$



Przykład 1

Mamy ostateczny wykres $2\sqrt{-|x|+4}$.



Przykład 2

Teraz narysujemy wykres $f(x) = \left| \frac{2|x| + 1}{|x| - 1} \right|$.

Przykład 2

Teraz narysujemy wykres $f(x) = \left| \frac{2|x| + 1}{|x| - 1} \right|$.

Zacniemy od narysowania wykresu $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$. Przekształcimy ten wzór:

$$\frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + 3}{x - 1} = 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Przykład 2

Teraz narysujemy wykres $f(x) = \left| \frac{2|x| + 1}{|x| - 1} \right|$.

Zacniemy od narysowania wykresu $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$. Przekształcimy ten wzór:

$$\frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + 3}{x - 1} = 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Zapiszmy przekształcenia:

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{3f(x)} \frac{3}{x} \xrightarrow{T_{[1,2]}} 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Przykład 2

Teraz narysujemy wykres $f(x) = \left| \frac{2|x| + 1}{|x| - 1} \right|$.

Zacniemy od narysowania wykresu $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$. Przekształcimy ten wzór:

$$\frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + 3}{x - 1} = 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Zapiszmy przekształcenia:

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{3f(x)} \frac{3}{x} \xrightarrow{T_{[1,2]}} 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Początkowo mamy asymptoty na osiach. Przekształcenie $3f(x)$ nie zmieni tych asymptot. Po $T_{[1,2]}$ asymptoty będą na $x = 1$ (pionowa) oraz $y = 2$ (pozioma).

Przykład 2

Teraz narysujemy wykres $f(x) = \left| \frac{2|x| + 1}{|x| - 1} \right|$.

Zacniemy od narysowania wykresu $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$. Przekształcimy ten wzór:

$$\frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + 3}{x - 1} = 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Zapiszmy przekształcenia:

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{3f(x)} \frac{3}{x} \xrightarrow{T_{[1,2]}} 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Początkowo mamy asymptoty na osiach. Przekształcenie $3f(x)$ nie zmieni tych asymptot. Po $T_{[1,2]}$ asymptoty będą na $x = 1$ (pionowa) oraz $y = 2$ (pozioma).

Przecięcia z osiami.

Przykład 2

Teraz narysujemy wykres $f(x) = \left| \frac{2|x| + 1}{|x| - 1} \right|$.

Zacniemy od narysowania wykresu $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$. Przekształcimy ten wzór:

$$\frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + 3}{x - 1} = 2 + \frac{3}{x - 1}$$

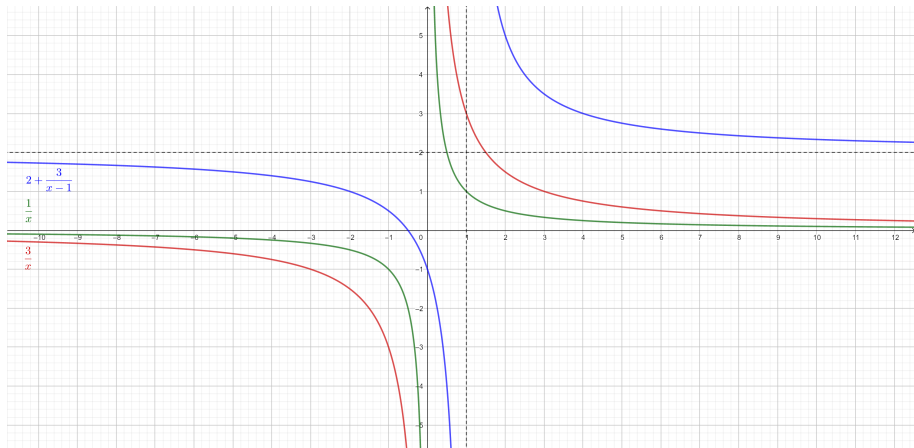
Zapiszmy przekształcenia:

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{3f(x)} \frac{3}{x} \xrightarrow{T_{[1,2]}} 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Początkowo mamy asymptoty na osiach. Przekształcenie $3f(x)$ nie zmieni tych asymptot. Po $T_{[1,2]}$ asymptoty będą na $x = 1$ (pionowa) oraz $y = 2$ (pozioma).

Przecięcia z osiami. Jeśli $x = 0$, to $y = -1$. Jeśli $y = 0$ to $x = -\frac{1}{2}$.

Przykład 2



Zaczynamy od $\frac{1}{x}$ na zielono. Na czerwono $\frac{3}{x}$ i na niebiesko końcowy wykres $2 + \frac{3}{x-1}$.

Przykład 2

Teraz pracujemy na wykresie $y = \frac{2x+1}{x-1}$, który już mamy narysowany.
Zapisujemy przekształcenia:

Przykład 2

Teraz pracujemy na wykresie $y = \frac{2x+1}{x-1}$, który już mamy narysowany.
Zapisujemy przekształcenia:

$$\frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{|f(x)|} \left| \frac{2x+1}{x-1} \right| \xrightarrow{f(|x|)} \left| \frac{2|x|+1}{|x|-1} \right|$$

Przykład 2

Teraz pracujemy na wykresie $y = \frac{2x+1}{x-1}$, który już mamy narysowany.
Zapisujemy przekształcenia:

$$\frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{|f(x)|} \left| \frac{2x+1}{x-1} \right| \xrightarrow{f(|x|)} \left| \frac{2|x|+1}{|x|-1} \right|$$

Uwaga, oczywiście można było zrobić te dwa przekształcenie w odwrotnej kolejności.

Przykład 2

Teraz pracujemy na wykresie $y = \frac{2x+1}{x-1}$, który już mamy narysowany.
Zapisujemy przekształcenia:

$$\frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{|f(x)|} \left| \frac{2x+1}{x-1} \right| \xrightarrow{f(|x|)} \left| \frac{2|x|+1}{|x|-1} \right|$$

Uwaga, oczywiście można było zrobić te dwa przekształcenie w odwrotnej kolejności.

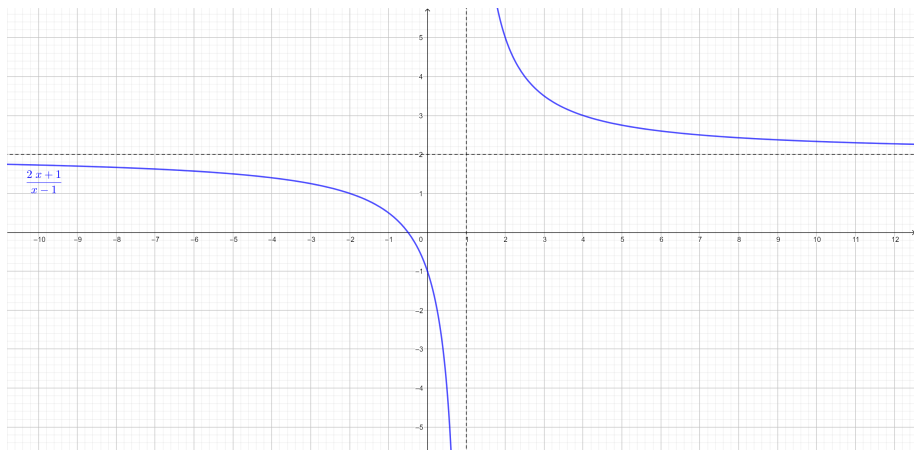
Na kolejnym slajdzie pojawią się wykresy kolejnych przekształceń.

Przykład 2

Zaczynamy od $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Przykład 2

Zaczynamy od $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

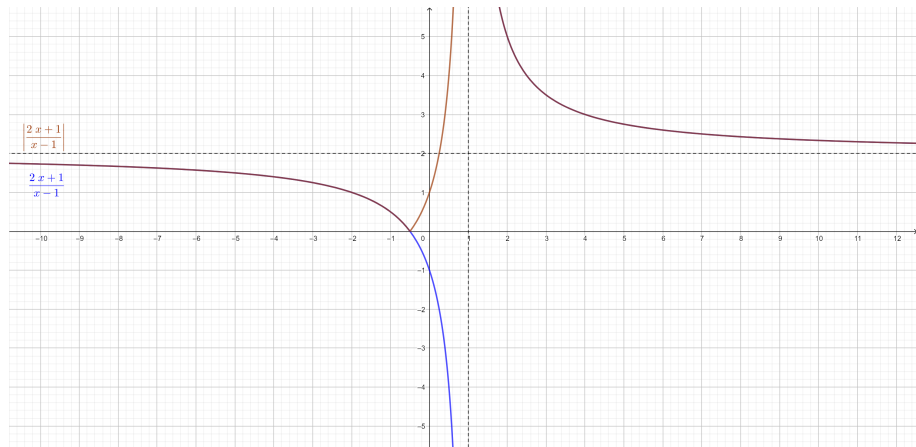


Przykład 2

$$\frac{2x + 1}{x - 1} \xrightarrow{|f(x)|} \left| \frac{2x + 1}{x - 1} \right|$$

Przykład 2

$$\frac{2x + 1}{x - 1} \xrightarrow{|f(x)|} \left| \frac{2x + 1}{x - 1} \right|$$

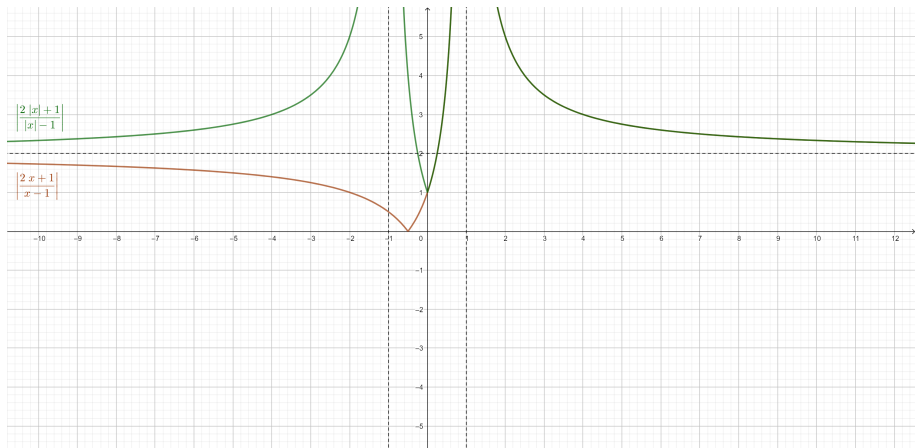


Przykład 2

$$\left| \frac{2x + 1}{x - 1} \right| \xrightarrow{f(|x|)} \left| \frac{2|x| + 1}{|x| - 1} \right|$$

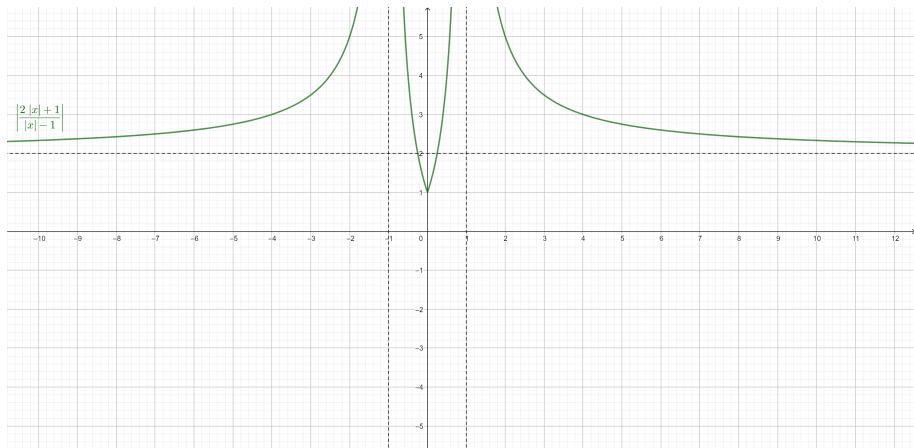
Przykład 2

$$\left| \frac{2x + 1}{x - 1} \right| \xrightarrow{f(|x|)} \left| \frac{2|x| + 1}{|x| - 1} \right|$$



Przykład 2

Ostatecznie wykres $f(x) = \left| \frac{2|x|+1}{|x|-1} \right|$ przedstawia się następująco:



Przykład 3

Teraz zaczniemy od funkcji $f(x)$, której wykres jest przedstawiony poniżej:



Będziemy chcieli narysować wykres $g(x) = -\frac{1}{2}f(-2|x + 1|)$.

Przykład 3

Najpierw rozpiszmy przekształcenia.

$$g(x) = -\frac{1}{2}f(-2|x + 1|)$$

Przykład 3

Najpierw rozpiszmy przekształcenia.

$$g(x) = -\frac{1}{2}f(-2|x + 1|)$$

$$f(x) \xrightarrow{\frac{1}{2}f(x), S_{0x}} -\frac{1}{2}f(x) \xrightarrow{f(2x), S_{0Y}} -\frac{1}{2}f(-2x) \xrightarrow{f(|x|)}$$

$$\xrightarrow{f(|x|)} -\frac{1}{2}f(-2|x|) \xrightarrow{T_{[-1,0]}} -\frac{1}{2}f(-2|x + 1|)$$

Przykład 3

Najpierw rozpiszmy przekształcenia.

$$g(x) = -\frac{1}{2}f(-2|x+1|)$$

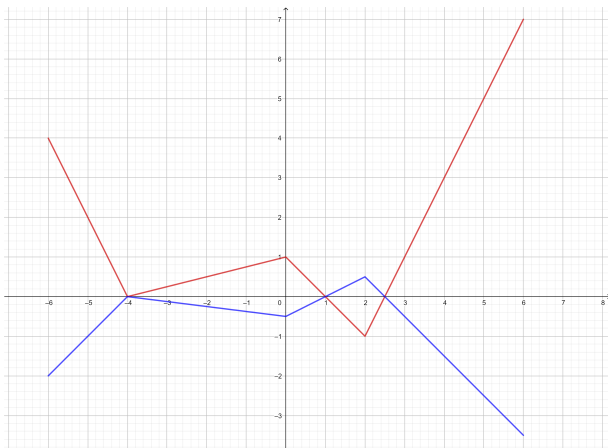
$$f(x) \xrightarrow{\frac{1}{2}f(x), S_{Ox}} -\frac{1}{2}f(x) \xrightarrow{f(2x), S_{Oy}} -\frac{1}{2}f(-2x) \xrightarrow{f(|x|)}$$

$$\xrightarrow{f(|x|)} -\frac{1}{2}f(-2|x|) \xrightarrow{T_{[-1,0]}} -\frac{1}{2}f(-2|x+1|)$$

Czas na wykresy.

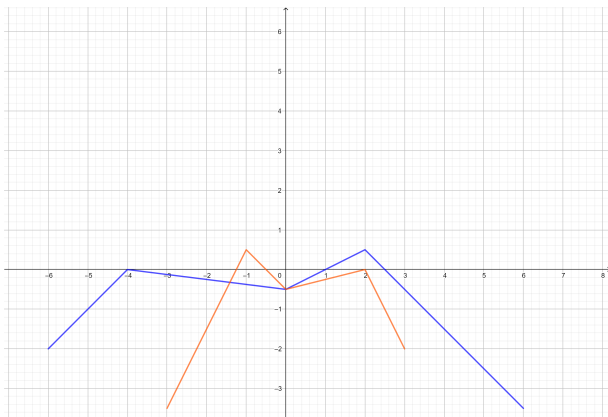
Przykład 3

$$f(x) \xrightarrow{\frac{1}{2}f(x), S_{OX}} -\frac{1}{2}f(x)$$



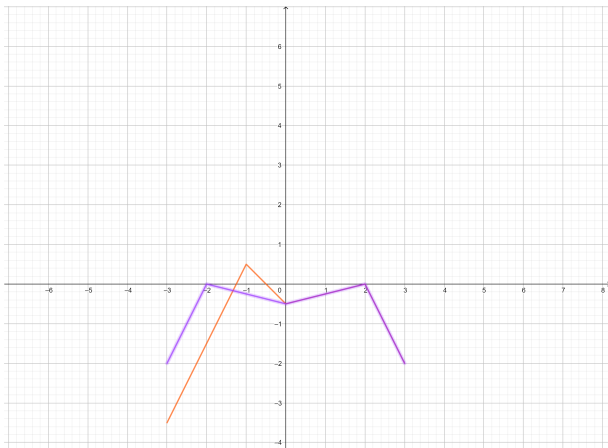
Przykład 3

$$-\frac{1}{2}f(x) \xrightarrow{f(2x), S_{OY}} -\frac{1}{2}f(-2x)$$



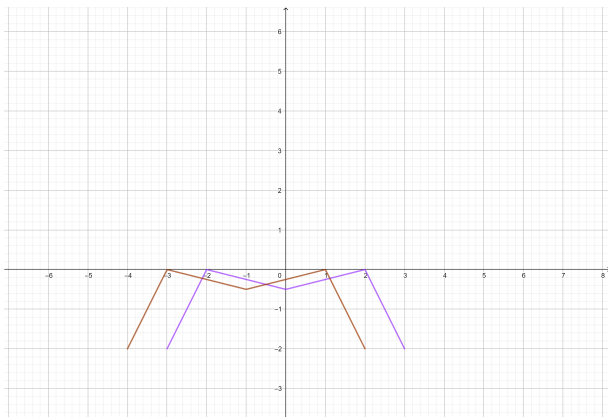
Przykład 3

$$-\frac{1}{2}f(-2x) \xrightarrow{f(|x|)} -\frac{1}{2}f(-2|x|)$$



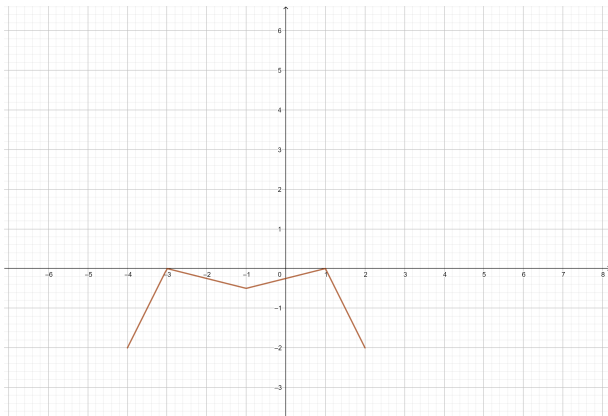
Przykład 3

$$-\frac{1}{2}f(-2|x|) \xrightarrow{T_{[-1,0]}} -\frac{1}{2}f(-2|x+1|)$$



Przykład 3

Ostateczny wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{2}f(-2|x + 1|)$.



Końcowe uwagi

Trzeba pamiętać o dwóch zasadniczych rzeczach.

Końcowe uwagi

Pierwsza rzecz:

Końcowe uwagi

Pierwsza rzecz:

Mamy dwa rodzaje przekształceń: te, które odnoszą się do całego wzoru funkcji i te, które odnoszą się do x .

Końcowe uwagi

Pierwsza rzecz:

Mamy dwa rodzaje przekształceń: te, które odnoszą się do całego wzoru funkcji i te, które odnoszą się do x . Jeśli mam funkcję $y = 2^{x+3}$, a chciałbym uzyskać $y = 2^{|x+3|}$, to nie ma takiej możliwości (a przynajmniej nie bezpośrednio, musiałbym wykonać kilka przekształceń). Mogę uzyskać $y = |2^{x+3}|$ lub $y = 2^{|x|+3}$.

Końcowe uwagi

Pierwsza rzecz:

Mamy dwa rodzaje przekształceń: te, które odnoszą się do całego wzoru funkcji i te, które odnoszą się do x . Jeśli mam funkcję $y = 2^{x+3}$, a chciałbym uzyskać $y = 2^{|x+3|}$, to nie ma takiej możliwości (a przynajmniej nie bezpośrednio, musiałbym wykonać kilka przekształceń). Mogę uzyskać $y = |2^{x+3}|$ lub $y = 2^{|x|+3}$. Jeśli o tym pamiętamy, to łatwiej nam będzie ustalić kolejność przekształceń.

Końcowe uwagi

Druga rzecz:

Końcowe uwagi

Druga rzecz:

Przekształcenia, które działają na całej funkcji odnoszą się do y i działają zgodnie z naszą intuicją. Np. $f(x) + 1$ oznacza, że wszystkie y zwiększają się o 1 (funkcja przesuwana się o jedną jednostkę do góry), a $2f(x)$ sprawia, że wszystkie y są mnożone razy 2 (funkcja jest rozciągnięta w pionie względem osi OX).

Końcowe uwagi

Druga rzecz:

Przekształcenia, które działają na całej funkcji odnoszą się do y i działają zgodnie z naszą intuicją. Np. $f(x) + 1$ oznacza, że wszystkie y zwiększają się o 1 (funkcja przesuwana się o jedną jednostkę do góry), a $2f(x)$ sprawia, że wszystkie y są mnożone razy 2 (funkcja jest rozciągnięta w pionie względem osi OX).

Przekształcenia, które odnoszą się do x działają pozornie odwrotnie do intuicji. Np. $f(x + 1)$ oznacza, że wszystkie x zmniejszamy o 1 (przesuwamy funkcję o 1 w lewo), a $f(2x)$ sprawia, że wszystkie x dzielimy przez 2 (funkcja zostanie dwukrotnie zwężona w poziomie względem osi OY).

Na poniedziałkowej kartkówce będą przykłady podobne do tych z prezentacji i z lekcji.

Na poniedziałkowej kartkówce będą przykłady podobne do tych z prezentacji i z lekcji. Jeśli będą problemy ze zrozumieniem, to możemy na początku lekcji jeszcze coś wyjaśnić.