

Nierówności kwadratowe

Musimy umieć rozwiązać nierówności kwadratowe.

Ogólna strategia

By rozwiązać nierówność:

$$f(x) > 0$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją kwadratową, będziemy szkicowali $f(x)$ i sprawdzali, gdzie funkcja leży nad osią OX.

Ogólna strategia

By rozwiązać nierówność:

$$f(x) > 0$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją kwadratową, będziemy szkicowali $f(x)$ i sprawdzali, gdzie funkcja leży nad osią OX.

Normalnie, by narysować funkcję kwadratową potrzebne nam są:

- miejsca zerowe,
- przecięcie z osią OY,
- wierzchołek.

Ogólna strategia

By rozwiązać nierówność:

$$f(x) > 0$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją kwadratową, będziemy szkicowali $f(x)$ i sprawdzali, gdzie funkcja leży nad osią OX.

Ogólna strategia

By rozwiązać nierówność:

$$f(x) > 0$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją kwadratową, będziemy szkicowali $f(x)$ i sprawdzali, gdzie funkcja leży nad osią OX .

Na potrzeby rozwiązania nierówności wystarczą

- miejsca zerowe,
- współczynnik a (zależnie od znaku a narysujemy ramiona do góry bądź do dołu).

Ogólna strategia

Oczywiście w przypadku, gdy nasza nierówność jest $<$, \leq lub \geq , patrzymy odpowiednio, kiedy wykres jest pod OX ($<$), nie jest nad OX (\leq), nie jest pod OX (\geq).

Przykład 1

Rozwiąż:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

Przykład 1

Rozwiąż:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Przykład 1

Rozwiąż:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Możemy je znaleźć rozkładając na dwa nawiasy, lub np. korzystając z Δ .

Przykład 1

Rozwiąż:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Możemy je znaleźć rozkładając na dwa nawiasy, lub np. korzystając z Δ .

$a = 1 > 0$ czyli ramiona do góry.

Przykład 1

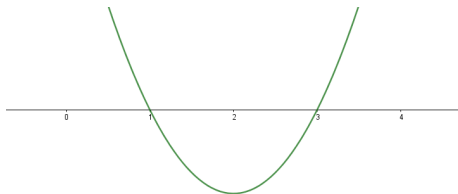
Rozwiąż:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Możemy je znaleźć rozkładając na dwa nawiasy, lub np. korzystając z Δ .

$a = 1 > 0$ czyli ramiona do góry.

Pomocniczy szkic:



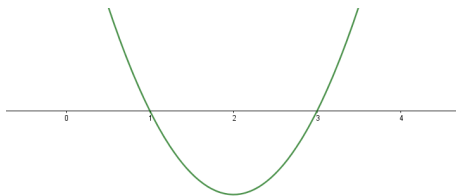
Rozwiązanie: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

Przykład 1

Jeszcze raz wyjaśnijmy skąd to rozwiązanie.

Przykład 1

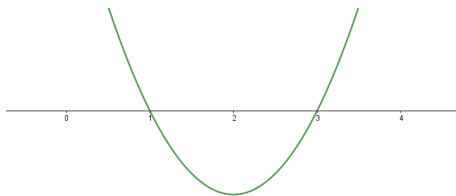
Jeszcze raz wyjaśnijmy skąd to rozwiązanie.



To jest rysunek $y = x^2 - 4x + 3$.

Przykład 1

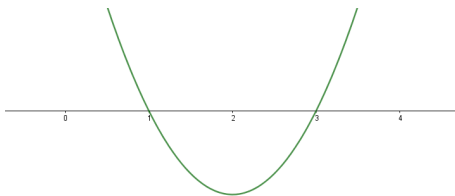
Jeszcze raz wyjaśnijmy skąd to rozwiązanie.



To jest rysunek $y = x^2 - 4x + 3$. My chcemy, by $x^2 - 4x + 3$ było większe od 0 (bo rozwiązujemy $x^2 - 4x + 3 > 0$), czyli, by wykres leżał nad osią OX .

Przykład 1

Jeszcze raz wyjaśnijmy skąd to rozwiązanie.



To jest rysunek $y = x^2 - 4x + 3$. My chcemy, by $x^2 - 4x + 3$ było większe od 0 (bo rozwiązujemy $x^2 - 4x + 3 > 0$), czyli, by wykres leżał nad osią OX . Z wykresu możemy odczytać, że tak jest właśnie dla $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Przykład 2

Rozwiąż:

$$x^2 - 6x - 16 < 0$$

Przykład 2

Rozwiąż:

$$x^2 - 6x - 16 < 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -2$, $x_2 = 8$.

Przykład 2

Rozwiąż:

$$x^2 - 6x - 16 < 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -2$, $x_2 = 8$.

$a = 1 > 0$ czyli ramiona do góry.

Przykład 2

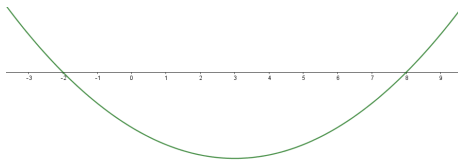
Rozwiąż:

$$x^2 - 6x - 16 < 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -2$, $x_2 = 8$.

$a = 1 > 0$ czyli ramiona do góry.

Pomocniczy szkic:



Przykład 2

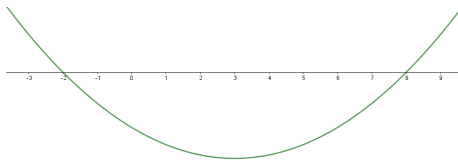
Rozwiąż:

$$x^2 - 6x - 16 < 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -2$, $x_2 = 8$.

$a = 1 > 0$ czyli ramiona do góry.

Pomocniczy szkic:



Rozwiązanie: $x \in (-2, 8)$.

Przykład 2

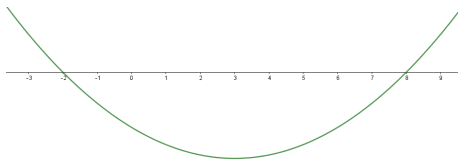
Rozwiąż:

$$x^2 - 6x - 16 < 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -2$, $x_2 = 8$.

$a = 1 > 0$ czyli ramiona do góry.

Pomocniczy szkic:



Rozwiązanie: $x \in (-2, 8)$. Bo tym razem chcemy, by $x^2 - 6x - 16 < 0$, czyli, by nasz wykres leżał pod osią OX .

Przykład 3

Rozwiąż:

$$9 - x^2 \geq 0$$

Przykład 3

Rozwiąż:

$$9 - x^2 \geq 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Przykład 3

Rozwiąż:

$$9 - x^2 \geq 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

$a = -1 < 0$ czyli ramiona do dołu.

Przykład 3

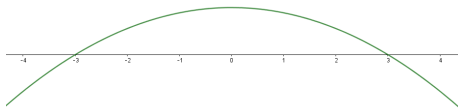
Rozwiąż:

$$9 - x^2 \geq 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

$a = -1 < 0$ czyli ramiona do dołu.

Pomocniczy szkic:



Rozwiązanie: $x \in \langle -3, 3 \rangle$

Komentarz do przykładów 1,2,3

W przykładzie 1 nasza funkcja kwadratowa miała być większa od zera ($>$), więc sprawdzaliśmy, dla jakich argumentów (x), ta funkcja leży nad osią OX (y jest większy od 0). W przykładzie 2 funkcja miała być mniejsza od zera, więc sprawdzaliśmy, dla jakich argumentów, leży pod osią OX . W przykładzie 3 funkcja miała być niemniejsza od zera, więc sprawdzaliśmy, dla jakich argumentów nie leży pod osią OX (czyli nad lub na).

Przykład 4

Rozwiąż:

$$(x - 2)^2 - 5x > (2x - 1)^2 + 2$$

Przykład 4

Rozwiąż:

$$(x - 2)^2 - 5x > (2x - 1)^2 + 2$$

Na początku wszystko wyznaczamy i przeliczamy na jedną stronę, by nasz problem zredukować do analogicznego do powyższych.

Przykład 4

Rozwiąż:

$$(x - 2)^2 - 5x > (2x - 1)^2 + 2$$

Na początku wszystko wyznaczamy i przierzucamy na jedną stronę, by nasz problem zredukować do analogicznego do powyższych. Dostajemy:

$$-3x^2 - 5x + 3 > 0$$

Przykład 4

$$-3x^2 - 5x + 3 > 0$$

Przykład 4

$$-3x^2 - 5x + 3 > 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Przykład 4

$$-3x^2 - 5x + 3 > 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

$a = -3 < 0$ czyli ramiona do dołu.

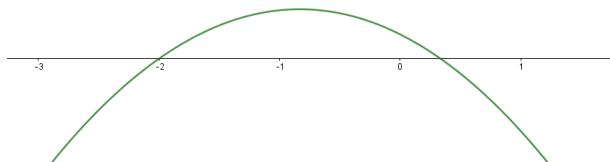
Przykład 4

$$-3x^2 - 5x + 3 > 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

$a = -3 < 0$ czyli ramiona do dołu.

Pomocniczy szkic:



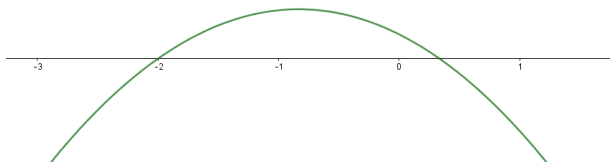
Przykład 4

$$-3x^2 - 5x + 3 > 0$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

$a = -3 < 0$ czyli ramiona do dołu.

Pomocniczy szkic:



Rozwiązanie: $x \in (-2, \frac{1}{3})$

Przykład 5

Rozwiąż:

$$4x^2 + 2x + 6 > 0$$

Przykład 5

Rozwiąż:

$$4x^2 + 2x + 6 > 0$$

Miejsca zerowe: $\Delta < 0$, nie ma miejsc zerowych.

Przykład 5

Rozwiąż:

$$4x^2 + 2x + 6 > 0$$

Miejsca zerowe: $\Delta < 0$, nie ma miejsc zerowych.

$a = 4 > 0$ czyli ramiona do góry.

Przykład 5

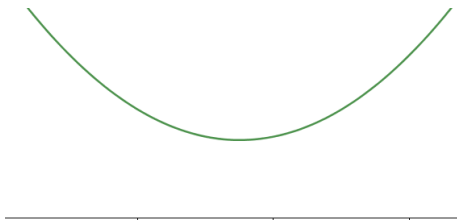
Rozwiąż:

$$4x^2 + 2x + 6 > 0$$

Miejsca zerowe: $\Delta < 0$, nie ma miejsc zerowych.

$a = 4 > 0$ czyli ramiona do góry.

Pomocniczy szkic:



Rozwiązanie: $x \in \mathbb{R}$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0,$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$x^2 - 8x + 7 > 0$, Rozwiązanie:

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0,$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie:}$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0,$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \text{ Rozwiązanie:}$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right],$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right],$$

$$3x^2 - 8x > 0,$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right],$$

$$3x^2 - 8x > 0, \text{ Rozwiązanie:}$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right],$$

$$3x^2 - 8x > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right),$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right],$$

$$3x^2 - 8x > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right),$$

$$8 - x^2 > 0,$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right],$$

$$3x^2 - 8x > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right),$$

$$8 - x^2 > 0, \text{ Rozwiązanie:}$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right],$$

$$3x^2 - 8x > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right),$$

$$8 - x^2 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in \left\langle -3, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$3x^2 - 8x > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right),$$

$$8 - x^2 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

$$9x \leq 10x^2,$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right],$$

$$3x^2 - 8x > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right),$$

$$8 - x^2 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

$$9x \leq 10x^2, \text{ Rozwiązanie:}$$

Ćwiczenia

Przećwicz na poniższych przykładach:

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty),$$

$$x^2 + 2x - 80 < 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-10, 8),$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in \left\langle -3, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$3x^2 - 8x > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right),$$

$$8 - x^2 > 0, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

$$9x \leq 10x^2, \text{ Rozwiązanie: } x \in (-\infty, 0) \cup \left\langle \frac{9}{10}, \infty \right\rangle.$$

Szykujemy się powoli na kartkówkę...