Równania kwadratowe z wartością bezwzględną

Na prezentacji omówimy przykłady równań kwadratowych, w których występuje wartość bezwzględna.

Wprowadzenie

By rozwiązać równanie postaci $|f(x)| = a$ dla $a \geqslant 0$ rozwiązujemy alternatywę:

$$f(x) = -a \qquad \vee \qquad f(x) = a$$

Wprowadzenie

By rozwiązać równanie postaci $|f(x)| = a$ dla $a \geqslant 0$ rozwiązujemy alternatywę:

$$f(x) = -a \qquad \vee \qquad f(x) = a$$

Nie ma tu znaczenia, czy $f(x)$ to funkcja liniowa czy kwadratowa czy jakakolwiek inna.

Przykład 1

Rozwiąż $|x^2 - 5x + 5| = 1$

Przykład 1

Rozwiąż $|x^2 - 5x + 5| = 1$

Rozwiązujemy

$$x^2 - 5x + 5 = -1 \qquad \vee \qquad x^2 - 5x + 5 = 1$$

Przykład 1

Rozwiąż $|x^2 - 5x + 5| = 1$

Rozwiązujemy

$$x^2 - 5x + 5 = -1 \qquad \vee \qquad x^2 - 5x + 5 = 1$$

Czyli:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad \vee \qquad x^2 - 5x + 4 = 0$$

Przykład 1

Rozwiąż $|x^2 - 5x + 5| = 1$

Rozwiązujemy

$$x^2 - 5x + 5 = -1 \qquad \vee \qquad x^2 - 5x + 5 = 1$$

Czyli:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad \vee \qquad x^2 - 5x + 4 = 0$$

Pierwsze równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Drugie równanie również ma dwa rozwiązania $x_3 = 1$, $x_4 = 4$.

Przykład 1

Rozwiąż $|x^2 - 5x + 5| = 1$

Rozwiązujemy

$$x^2 - 5x + 5 = -1 \qquad \vee \qquad x^2 - 5x + 5 = 1$$

Czyli:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad \vee \qquad x^2 - 5x + 4 = 0$$

Pierwsze równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Drugie równanie również ma dwa rozwiązania $x_3 = 1$, $x_4 = 4$.
Ostatecznie otrzymujemy cztery rozwiązania $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

Przykład 2

Rozwiąż $|3x^2 + 6x - 11| = -3$

Przykład 2

Rozwiąż $|3x^2 + 6x - 11| = -3$

Po prawej stronie występuje liczba ujemna, a po lewej nieujemna. W związku z tym równanie jest sprzeczne. $x \in \emptyset$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$.

To jest w pewnym sensie połączenie poprzednich dwóch przykładów.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$.

To jest w pewnym sensie połączenie poprzednich dwóch przykładów. Jeśli $2x + 1 \geqslant 0$, to mamy przykład analogiczny do pierwszego, czyli

$$x^2 + 2x - 3 = -2x - 1 \qquad \vee \qquad x^2 + 2x - 3 = 2x + 1$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$.

To jest w pewnym sensie połączenie poprzednich dwóch przykładów. Jeśli $2x + 1 \geqslant 0$, to mamy przykład analogiczny do pierwszego, czyli

$$x^2 + 2x - 3 = -2x - 1 \qquad \vee \qquad x^2 + 2x - 3 = 2x + 1$$

Jeśli natomiast $2x + 1 < 0$, to mamy przykład analogiczny do drugiego i możemy po prostu napisać, że wtedy nie ma rozwiązań.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$.

Jeśli $2x + 1 < 0$, czyli $x < -\frac{1}{2}$, to równianie nie ma rozwiązań, gdyż prawa strona jest ujemna, a lewa jest nieujemna.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$.

Jeśli $2x + 1 < 0$, czyli $x < -\frac{1}{2}$, to równianie nie ma rozwiązań, gdyż prawa strona jest ujemna, a lewa jest nieujemna.

Jeśli $x \geqslant -\frac{1}{2}$, to

$$x^2 + 2x - 3 = -2x - 1 \qquad \vee \qquad x^2 + 2x - 3 = 2x + 1$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$.

Jeśli $2x + 1 < 0$, czyli $x < -\frac{1}{2}$, to równianie nie ma rozwiązań, gdyż prawa strona jest ujemna, a lewa jest nieujemna.

Jeśli $x \geqslant -\frac{1}{2}$, to

$$x^2 + 2x - 3 = -2x - 1 \qquad \vee \qquad x^2 + 2x - 3 = 2x + 1$$

Czyli:

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \qquad \vee \qquad x^2 - 4 = 0$$

Pierwsze równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = -2 - \sqrt{6}$, $x_2 = -2 + \sqrt{6}$. Drugie równanie również ma dwa rozwiązania $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$.

Jeśli $2x + 1 < 0$, czyli $x < -\frac{1}{2}$, to równianie nie ma rozwiązań, gdyż prawa strona jest ujemna, a lewa jest nieujemna.

Jeśli $x \geqslant -\frac{1}{2}$, to

$$x^2 + 2x - 3 = -2x - 1 \qquad \vee \qquad x^2 + 2x - 3 = 2x + 1$$

Czyli:

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \qquad \vee \qquad x^2 - 4 = 0$$

Pierwsze równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = -2 - \sqrt{6}$, $x_2 = -2 + \sqrt{6}$.
Drugie równanie również ma dwa rozwiązania $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.
Tylko dwa z powyższych rozwiązań spełniają założenie $x \geqslant -\frac{1}{2}$.
Ostatecznie otrzymujemy dwa rozwiązania $x \in \{-2 + \sqrt{6}, 2\}$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Najpierw ustalimy znak wyrażenia $x^2 - 4x - 5$. Miejsca zerowe tej funkcji to $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 5$. Czyli wyrażenie $x^2 - 4x - 5$ jest dodatnie dla $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$, a ujemne dla $x \in (-1, 5)$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Najpierw ustalimy znak wyrażenia $x^2 - 4x - 5$. Miejsca zerowe tej funkcji to $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 5$. Czyli wyrażenie $x^2 - 4x - 5$ jest dodatnie dla $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$, a ujemne dla $x \in (-1, 5)$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Najpierw ustalimy znak wyrażenia $x^2 - 4x - 5$. Miejsca zerowe tej funkcji to $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 5$. Czyli wyrażenie $x^2 - 4x - 5$ jest dodatnie dla $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$, a ujemne dla $x \in (-1, 5)$

Wyrażenie $x - 2$ jest oczywiście dodatnie dla $x > 2$, a ujemne dla $x < 2$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Najpierw ustalimy znak wyrażenia $x^2 - 4x - 5$. Miejsca zerowe tej funkcji to $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 5$. Czyli wyrażenie $x^2 - 4x - 5$ jest dodatnie dla $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$, a ujemne dla $x \in (-1, 5)$

Wyrażenie $x - 2$ jest oczywiście dodatnie dla $x > 2$, a ujemne dla $x < 2$.

Musimy więc przeanalizować następujące przedziały:

$$x < -1 \qquad -1 \leqslant x < 2 \qquad 2 \leqslant x < 5 \qquad 5 \leqslant x$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $x < -1$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $x < -1$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 5x - 12 = 0$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $x < -1$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 5x - 12 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania $x_1 = \frac{5-\sqrt{73}}{2}$ oraz $x_2 = \frac{5+\sqrt{73}}{2}$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $x < -1$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 5x - 12 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania $x_1 = \frac{5-\sqrt{73}}{2}$ oraz $x_2 = \frac{5+\sqrt{73}}{2}$. Tylko pierwsze z tych rozwiązań spełnia założenie $x < -1$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $-1 \leqslant x < 2$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne (ściślej: niedodatnie) i drugie jest ujemne. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $-1 \leqslant x < 2$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne (ściślej: niedodatnie) i drugie jest ujemne. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $-1 \leqslant x < 2$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne (ściślej: niedodatnie) i drugie jest ujemne. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania $x_3 = 1$ oraz $x_4 = 2$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $-1 \leqslant x < 2$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne (ściślej: niedodatnie) i drugie jest ujemne. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania $x_3 = 1$ oraz $x_4 = 2$. Znów tylko pierwsze z tych rozwiązań spełnia założenie $-1 \leqslant x < 2$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $2 \leqslant x < 5$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie (nieujemne). Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $2 \leqslant x < 5$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie (nieujemne). Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $2 \leqslant x < 5$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie (nieujemne). Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania $x_5 = 2$ oraz $x_6 = 3$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $2 \leqslant x < 5$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie (nieujemne). Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania $x_5 = 2$ oraz $x_6 = 3$. Oba rozwiązania spełniają założenie $2 \leqslant x < 5$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $5 \leqslant x$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie (nieujemne) i drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $5 \leqslant x$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie (nieujemne) i drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 3x - 16 = 0$$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $5 \leqslant x$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie (nieujemne) i drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 3x - 16 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania $x_7 = \frac{3-\sqrt{73}}{2}$ oraz $x_8 = \frac{3+\sqrt{73}}{2}$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $5 \leqslant x$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie (nieujemne) i drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 3x - 16 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania $x_7 = \frac{3-\sqrt{73}}{2}$ oraz $x_8 = \frac{3+\sqrt{73}}{2}$. Tylko drugie z tych rozwiązań spełnia założenie $5 \leqslant x$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Ostatecznie otrzymujemy:

$$x \in \left\{ \frac{5 - \sqrt{73}}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ \frac{3 + \sqrt{73}}{2} \right\}$$

Wejściówka

Na zajęciach przećwiczymy jeszcze podobne przykłady, ale te z prezentacji proszę dobrze przestudiować. Jeśli będą jakieś pytania, to wyjaśnimy na lekcji.