7.76. Wiadomo, że $\cos 3\alpha = \frac{-11}{16}$ oraz $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Oblicz $\cos\alpha$.

Odp. $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ lub $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{5}-1}{8}$

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

7.77. Wykaż, że:

a) $\sin 38^\circ + \sin 22^\circ = \cos 8^\circ$

b) $\cos 40^\circ - \cos 20^\circ = -\sin 10^\circ$

c) $\cos 47^\circ + \cos 13^\circ = \sqrt{3}\cos 17^\circ$

d) $2 \cdot (\sin 74^\circ - \sin 46^\circ) \cdot \cos 14^\circ = \sin 28^\circ$.

7.78. Oblicz:

a) $\sin 42^\circ + \sin 78^\circ - \sqrt{3}\sin 72^\circ$

b) $\dfrac{\cos 36^\circ - \cos 24^\circ + \sin 54^\circ}{2\sin 12^\circ \cdot \cos 12^\circ}$

c) $\dfrac{\sin 1^\circ + \cos 89^\circ - \cos 29^\circ}{\cos 299^\circ}$

d) $\dfrac{\sin 70^\circ - \cos 40^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 100^\circ - \cos 20^\circ}$.

Odp. a) 0 b) $\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{3}$ d) 0

7.79. Przedstaw dane wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $1 + \cos(\alpha - \beta)$ b) $1 + \sin(\alpha + \beta)$

c) $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$

d) $1 + \cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}$

e) $\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha$

f) $\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$

Odp. a) $2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ b) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

c) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$ d) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{4}\right)$

e) $-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ f) $4\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$

D 7.80. Wykaż, że jeśli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)} = \operatorname{tg}\alpha$.

D 7.81. Wykaż, że prawdziwa jest dana równość. Podaj konieczne założenia.

a) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha$ b) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}+\operatorname{ctg}\alpha=0$

D 7.82. Wykaż, że:

a) $\cos 5\alpha - 2\cos\alpha\cos 7\alpha + \cos 9\alpha = 0$

b) $\sin\dfrac{\alpha}{6}+2\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{2\alpha}{3}=\sin\dfrac{5\alpha}{6}$

c) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1-\cos 7\alpha}{2}=\cos 3\alpha\cos 4\alpha$.

D 7.83. Wykaż, że:

a) $\dfrac{\cos 10\alpha+\cos 6\alpha+2\cos 2\alpha}{\cos 4\alpha\cdot\sin 6\alpha+\cos 4\alpha\cdot\sin 2\alpha}=2\operatorname{ctg}4\alpha$, gdzie $\alpha\neq\dfrac{k\pi}{4}$ i $\alpha\neq\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}$, $k\in Z$

b) $\dfrac{\sin 3\alpha+\cos\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha+\cos 3\alpha-\cos 7\alpha}=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$, gdzie $\alpha\neq\dfrac{k\pi}{5}$, $k\in Z$

c) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 2\alpha+\cos\alpha+1}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1}=2\cos\alpha$, gdzie $\alpha\neq\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}$, $k\in Z$

d) $\dfrac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)$, gdzie $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

7.84. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x)=\dfrac{\sin x}{3}+\dfrac{\cos x}{3}$ b) $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin 2x+5$

c) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)$ d) $f(x)=-2\sin^2\dfrac{x-\pi}{2}+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$

Odp. a) $ZW=\left\langle-\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right\rangle$ b) $ZW=\left\langle 5-\sqrt{3},5+\sqrt{3}\right\rangle$

c) $ZW=\left\langle-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$ d) $ZW=\left\langle\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right\rangle$