c) $\sin 241^\circ \cos 29^\circ - \cos 61^\circ \sin 151^\circ$

d) $\cos(-345^\circ)\cdot(-\cos 15^\circ) - \cos 75^\circ \sin 195^\circ$

Odp. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{-1}{2}$ c) -1 d) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

7.42. Oblicz:

a) $\dfrac{\cos 168^\circ\cdot\cos 108^\circ+\sin 528^\circ\cdot\cos 18^\circ}{\sin 7^\circ\cdot\cos 157^\circ-\cos 547^\circ\cdot\cos 113^\circ}$

b) $\dfrac{\cos 33^\circ\cdot\cos(-372^\circ)+\sin 12^\circ\cdot\sin 327^\circ}{\sin 34^\circ\cdot\cos 116^\circ+\sin 56^\circ\cdot\sin 476^\circ}$

Odp. a) -1 b) $\sqrt{2}$

7.43. Oblicz:

a) $\cos\frac{25\pi}{12}$ b) $\sin\frac{13\pi}{12}$ c) $\cos\frac{11\pi}{12}$ d) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$

Odp. a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ c) $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ d) $2+\sqrt{3}$

7.44. Wiedząc, że $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ i $\sin\beta=\frac{1}{2}$ oblicz:

a) $\sin(\alpha+\beta)$ b) $\sin(\alpha-\beta)$ c) $\cos(\alpha+\beta)$ d) $\cos(\alpha-\beta)$

Odp. a) $\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$ c) $\frac{-2\sqrt{6}-1}{6}$ d) $\frac{-2\sqrt{6}+1}{6}$

7.45. Wiedząc, że $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ oraz $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ i $\operatorname{tg}\beta=-2{,}4$ oblicz:

a) $\sin(\alpha+\beta)$ b) $\cos(\alpha-\beta)$ c) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ d) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$

Odp. a) $\frac{10+12\sqrt{5}}{39}$ b) $\frac{-5\sqrt{5}-24}{39}$ c) $\frac{540+338\sqrt{5}}{451}$ d) $\frac{270+169\sqrt{5}}{310}$

7.46. Kąty trójkąta są równe α, β, γ, a jego boki mają odpowiednio długość a, b, c. Rozwiąż ten trójkąt wiedząc, że:

a) $\alpha=60^\circ$, $\beta=45^\circ$, $a=8$ b) $\alpha=60^\circ$, $b=10$, $c=16$

c) $\sin\alpha=0{,}96$; $\sin\beta=0{,}28$; $c=25$ d) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a=8$, $c=4$.

Odp. a) $\gamma = 75°$, $b = \frac{8\sqrt{6}}{3}$, $c = \frac{4\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)}{3}$

b) $\beta \approx 38°$, $\gamma \approx 82°$, $a = 14$

c) $(\alpha \approx 74°, \beta \approx 16°, \gamma = 90°, a = 24, b = 7)$ lub

$\left(\alpha = 106°, \beta \approx 16°, \gamma \approx 58°, a = 28\frac{244}{527}, b = 8\frac{159}{527}\right)$

d) $\left(\alpha = 45°, \beta \approx 114°, \gamma \approx 21°, b = 2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{7}\right)\right)$ lub

$\left(\alpha = 135°, \beta \approx 24°, \gamma \approx 21°, b = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{7}-1\right)\right)$

7.47. Sprawdź, czy dla α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ prawdziwa jest równość:

a) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

b) $\cos\beta\cdot\sin(\alpha-\beta) + \sin\beta\cdot\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha$.

Odp. a) tak b) tak

7.48. Wyznacz kąty ostre α i β wiedząc, że $\sin(\alpha-\beta) = 0{,}5$ oraz $2\cos(\alpha+\beta) = 1$.

Odp. $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{12}$

D 7.49. Wykaż, że:

a) jeśli $\cos 9° = a$, to $\sin 51° = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{1-a^2}{4}}$

b) jeśli $\sin 162° = p$, to $\cos 27° = \frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1-p^2}{2}}$.

D 7.50. Wykaż, że jeśli α i β są kątami ostrymi oraz $\operatorname{tg}\alpha = 3$ i $\operatorname{tg}\beta = 2$, to $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

D 7.51. Wykaż, że prawdziwe są następujące równości. Podaj konieczne założenia.

a) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$

b) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$

D 7.52. Wykaż, że wartość wyrażenia $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos^2\alpha$ nie zależy od miary kąta α.

7.53. Naszkicuj wykres funkcji, określonej wzorem:

a) $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$

b) $y=\sqrt{8}\sin x+\sqrt{8}\cos x$

c) $y=\frac{\operatorname{tg} x+1}{1-\operatorname{tg} x}$

d) $y=\left|\frac{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg} x}\right|$

Odp. *wskazówka:* a) $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right), x\in\mathbf{R}$ b) $y=4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right), x\in\mathbf{R}$

c) $y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), x\in\mathbf{R}-\left\{a:a=\frac{\pi}{4}+k\pi\vee a=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

d) $y=\left|\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|, x\in\mathbf{R}-\left\{a:a=\frac{-\pi}{6}+k\pi\vee a=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

D 7.54. Wykaż, że jeśli $\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}\beta=0$, to $\sin(\alpha+\beta)=3\sin(\alpha-\beta)$.

D 7.55. Wykaż, że jeśli $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=4$ oraz $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-2$, to $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta=10$.

D 7.56. Wykaż, że jeśli $\gamma=\alpha+\beta$, to $\sin^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma$.

D 7.57. Wykaż, że $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

D 7.58. Wykaż, że jeśli $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, to $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$.

Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta

7.60. Oblicz $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ oraz $\operatorname{ctg} 2\alpha$, jeśli:

a) $\cos\alpha=\frac{1}{5}$ i $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

b) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ i $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

c) $\operatorname{tg}\alpha=-3$ i $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

d) $\operatorname{ctg}\alpha=2{,}5$ i $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Odp. a) $\sin 2\alpha = \frac{-4\sqrt{6}}{25}$ $\cos 2\alpha = \frac{-23}{25}$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4\sqrt{6}}{23}$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{23\sqrt{6}}{24}$

b) $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ $\cos 2\alpha = \frac{1}{9}$ $\operatorname{tg} 2\alpha = 4\sqrt{5}$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{20}$

c) $\sin 2\alpha = \frac{-3}{5}$ $\cos 2\alpha = \frac{-4}{5}$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{4}$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = 1\frac{1}{3}$

d) $\sin 2\alpha = \frac{20}{29}$ $\cos 2\alpha = \frac{21}{29}$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{20}{21}$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = 1\frac{1}{20}$

7.61. Oblicz:

a) $\cos^2 165^\circ - \cos^2 105^\circ$

b) $\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ$

c) $\frac{1+\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{ctg} 75^\circ}$

d) $\frac{1}{\sin^2 105^\circ} - \frac{1}{\sin^2 375^\circ}$

e) $\frac{\sin^2 10^\circ - \sin^2 100^\circ}{7\sin 35^\circ \cdot \sin 125^\circ}$

f) $\frac{\operatorname{tg}^2 75^\circ + \operatorname{tg}^2 15^\circ}{\cos^2 60^\circ}$.

Odp. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $-8\sqrt{3}$ e) $\frac{-2}{7}$ f) 56

7.62. Wiadomo, że $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{6}{5}$. Oblicz:

a) $\sin 2\alpha$

b) $\cos 2\alpha$.

Odp. a) $\frac{11}{25}$ b) $\frac{-6\sqrt{14}}{25}$

7.63. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, jeśli $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Odp. $\frac{7}{25}$

7.64. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^4\frac{\alpha}{2} + \cos^4\frac{\alpha}{2}$ wiedząc, że $5\sin^2\alpha - 1 = 5\cos^2\alpha$.

Odp. 0,7

7.65. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\frac{\alpha}{3}+\cos\frac{\alpha}{3}$ wiedząc, że $\sin\frac{2}{3}\alpha=\frac{-8}{9}$ oraz $\sin^3\frac{\alpha}{3}+\cos^3\frac{\alpha}{3}=\frac{13}{27}$.

Odp. $\frac{1}{3}$

7.66. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^3\frac{\alpha}{2}-\cos^3\frac{\alpha}{2}$ wiedząc, że $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1+4\cos\frac{\alpha}{2}}{4}$.

Odp. $\frac{47}{128}$

7.67. Wiadomo, że $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$ i $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$. Oblicz $\sin^3 2\alpha-\cos^3 2\alpha$.

7.67 $\frac{-9\sqrt{3}}{16}$

D **7.68.** Wiadomo, że $\cos 36°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Wykaż, że:

a) $\cos 18°=\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$

b) $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

D **7.69.** Wykaż, że jeśli $\alpha\neq k\pi$, gdzie $k\in\boldsymbol{Z}$, to $\sin\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Korzystając z tej równości, oblicz $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$.

Odp. $\sqrt{2}-1$; *wskazówka:* Zauważ, że $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}<1$.

D **7.70.** Wykaż, że jeśli $\alpha\neq 2k\pi$, gdzie $k\in\boldsymbol{Z}$, to $\cos\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+1}$. Korzystając z tej równości oblicz $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{12}$.

Odp. $2+\sqrt{3}$

7.71. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ b) $f(x)=\left(\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4}\right)^2+2$

c) $f(x)=\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2x-1}$ d) $f(x)=1+4\cos^2\frac{x}{4}\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{2}$.

Odp. *wskazówka:* a) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ b) $f(x)=3-\sin\frac{x}{2}$

c) $f(x)=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$, gdzie $x\neq\frac{k\pi}{4}, k\in Z$ d) $f(x)=1-\cos x$

7.72. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x)=(\sin x+\cos x)^2-\sin 2x$ b) $f(x)=8\sin^2x\cos^2x+3$

c) $f(x)=\sin^4x-\cos^4x-1$ d) $f(x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)$.

Odp. a) $f(x)=1$, $ZW=\{1\}$ b) $f(x)=2\sin^2 2x+3$, $ZW=\langle 3,5\rangle$

c) $f(x)=-1-\cos 2x$, $ZW=\langle -2,0\rangle$ d) $f(x)=-\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}+1$, $ZW=\left\langle -1,1\frac{1}{4}\right\rangle$

D 7.73. Wykaż, że prawdziwe są dane równości. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$ b) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\cos 2\alpha$

c) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\frac{2(1+\cos 2\alpha)}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\sin 2\alpha$

D 7.74. Wykaż, że jeśli $\alpha\in\boldsymbol{R}$, to:

a) $1-8\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos 2\alpha$

b) $\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha+\cos^2 2\alpha=2(1-\cos 2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$

c) $2(1+\cos\alpha)-\sin^2\alpha=4\cos^4\frac{\alpha}{2}$.

D 7.75. Wykaż, że jeśli $\alpha\in\boldsymbol{R}$, to:

a) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ b) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.