

D 7.85. Wykaż, że jeśli α, β, γ są miarami kątów trójkąta, to:

$$a) \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$b) \sin \gamma \left(\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right) = \sin \alpha \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right).$$

D 7.86. Wykaż, że jeśli $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{to } \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 1 + 4 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right).$$

D 7.87. Wykaż, że liczba $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ$ jest potęgą liczby 2.

Odp. 2^3

Równania trygonometryczne, cz. 2

7.88. Rozwiąż dane równanie.

$$a) 2 \cos^2 \frac{x}{2} + 1 = 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$b) \sin 2x = \sin x$$

$$c) \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d) \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin x$$

$$e) \sin^4 3x + \cos^4 3x = \frac{1}{2}$$

$$f) \sin x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

Odp. a) $x = \frac{-\pi}{2} + 4k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}$ b) $x = k\pi \vee x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{24} + 2k\pi \vee x = \frac{-7\pi}{24} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ d) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$ f) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

7.89. Rozwiąż dane równanie.

$$a) \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 1$$

$$b) \sin x + \sin 3x = \sin 2x$$

$$c) \sin^4 x = 1 + \cos^4 x$$

$$d) \sin^2 x - \cos 2x = 2$$

$$e) \frac{\sin 2x}{2} + \sin^2 x = \cos x + \sin x \qquad f) \sin x \cdot \sin 2x = \cos x \cdot \cos 2x$$

$$\text{Odp. a) } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \quad b) x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$c) x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \quad d) x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$e) x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \quad f) x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$$

7.90. Rozwiąż dane równanie.

$$a) 2\cos x + 3 = 4\cos \frac{x}{2} \quad b) \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \quad c) \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$d) \sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0 \quad e) \cos x \cdot \sin 7x = \cos 3x \cdot \sin 5x \quad f) \sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Odp. a) } x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \frac{-2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbf{Z} \quad b) x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$c) x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \quad d) x = \frac{k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{-\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$e) x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$$

$$f) x = \frac{\pi}{2} + 3k\pi \vee x = \pi + 3k\pi \vee x = \frac{-\pi}{2} + 3k\pi \vee x = 2\pi + 3k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

7.91. Rozwiąż dane równanie.

$$a) 1 + \cos x + \cos \frac{x}{2} = 0 \qquad b) \sin^2 2x + 4\cos 2x = 4$$

$$c) \sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad d) \sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$$

$$e) \cos x = \sin 2x + \cos 3x \qquad f) \cos 4x \cos 2x - \sin 3x \sin 5x = 0$$

$$\text{Odp. a) } x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \frac{-4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbf{Z} \quad b) x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$c) x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \quad d) x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$$

$$e) x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \quad f) x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

7.92. Rozwiąż równanie:

a) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 2 = 0$

b) $\sin x \cdot \cos 3x = \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x$

c) $\cos 2x + \sin 4x \operatorname{ctg} 2x = 0$

d) $\frac{\cos \frac{3x}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + \frac{\sin \frac{3x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 2.$

Odp. a) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ b) $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

7.93. Rozwiąż równanie w danym przedziale.

a) $\cos 2x + 5\sin x - 3 = 0, \langle -2\pi, \pi \rangle$ b) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}, \langle 0, 2\pi \rangle$

c) $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x, \langle -\pi, 2\pi \rangle$ d) $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \langle -2\pi, 2\pi \rangle$

Odp. a) $x \in \left\{ \frac{-11\pi}{6}, \frac{-7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$ b) $x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{17\pi}{12} \right\}$

c) $x \in \left\{ -\pi, \frac{-\pi}{4}, 0, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\}$ d) $x \in \left\{ \frac{-5\pi}{3}, -\pi, \frac{\pi}{3}, \pi \right\}$

7.94. Rozwiąż równanie w danym przedziale.

a) $\sin 2x + \cos x = 0, \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ b) $4\sin \frac{x}{2} + \cos x = 3, \langle -4\pi, 4\pi \rangle$

c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin 4x, \langle 0, 2\pi \rangle$ d) $\sin 3x \sin 6x = \sin 8x \sin 5x, \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Odp. a) $x \in \left\{ \frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ b) $x \in \{-3\pi, \pi\}$

c) $x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ d) $x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{11}, \frac{2\pi}{11}, \frac{3\pi}{11}, \frac{4\pi}{11}, \frac{5\pi}{11}, \frac{\pi}{2} \right\}$

7.95. Rozwiąż dane równanie.

a) $\sin 2x + \frac{\sin 2x}{3} + \frac{\sin 2x}{9} + \dots = 3\cos x$ b) $\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{4}\operatorname{tg} 2x + \dots = \operatorname{tg} x$

c) $\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{16} + \frac{\cos 2x}{64} - \dots = 0,2\sin 2x$

Odp. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ b) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ c) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

7.96. Rozwiąż dane równanie w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

a) $\frac{|\sin x|}{2} + \sin x \cos x = 0$ b) $3 \sin \frac{x}{2} - |\cos x| = 1$

c) $\cos 2x + 2 = 3|\cos x|$ d) $|\operatorname{tg} x| - \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$

Odp. a) $x \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right\}$ b) $x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

c) $x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right\}$ d) równanie sprzeczne

7.97. Wyznacz wszystkie wartości parametru $k, k \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie.

a) $\cos\left(\frac{2\pi+x}{4}\right) - \sqrt{8}k^2 = \cos\frac{1}{4}x + k\sqrt{2}$ b) $2\sin 4x \cos 3x = \frac{2k-1}{k+3} + \sin 7x$

c) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = |3k + 5|$ d) $4\sin^2 \frac{x}{2} - k^2 = 4\sin \frac{x}{2} - 7$

Odp. a) $k \in \left\langle -1, \frac{1}{2} \right\rangle$ b) $k \in \left\langle \frac{-2}{3}, 4 \right\rangle$

c) $k \in \left\langle -2, -1\frac{5}{6} \right\rangle \cup \left\langle -1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{3} \right\rangle$ d) $k \in \left\langle -\sqrt{15}, -\sqrt{6} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{6}, \sqrt{15} \right\rangle$

Nierówności trygonometryczne

7.98. Rozwiąż nierówność:

a) $\sin x \leq \frac{1}{2}$ gdzie $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ b) $\cos x > -\frac{1}{2}$, gdzie $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

c) $\operatorname{tg} x \geq -1$, gdzie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ d) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$, gdzie $x \in (-\pi, \pi)$

Odp. a) $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}, 2\pi \right\rangle$ b) $x \in \left(\frac{-2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

c) $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$ d) $x \in \left(-\pi, \frac{-5\pi}{6}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$

7.99. Rozwiąż nierówność w podanym przedziale.

a) $|\sin x| < 1, \langle -2\pi, 2\pi \rangle$

b) $|\cos x| \leq 0, \langle -2\pi, 2\pi \rangle$

c) $|\operatorname{tg} x| < \frac{\sqrt{3}}{3}, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$

d) $|\operatorname{ctg} x| \geq 1, \left(-\pi, \frac{\pi}{2} \right)$

Odp. a) $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle - \left\{ \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ b) $x \in \left\{ \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

c) $x \in \left(\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right)$ d) $x \in \left(-\pi, \frac{-3\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{-\pi}{4}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$

7.100. Rozwiąż daną nierówność w zbiorze liczb rzeczywistych.

a) $2 \sin x \geq \sqrt{2}$

b) $2 \cos x + \sqrt{3} < 0$

c) $\operatorname{tg} x < -1$

d) $3 \operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$

Odp. a) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$ b) $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$ d) $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

7.101. Rozwiąż daną nierówność w zbiorze liczb rzeczywistych.

a) $1 - 2 \cos^2 x \leq 0$

b) $\operatorname{tg}^2 x \geq \frac{1}{3}$

c) $4 \sin^2 x - 3 \leq 0$

d) $0 < 1 - \operatorname{ctg}^2 x$

Odp. a) $x \in \left\langle \frac{-\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{-\pi}{6} + k\pi \right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left\langle \frac{-\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$ d) $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

7.102. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\cos 3x > \frac{1}{2}$

b) $2 \sin 2x > \sqrt{2}$

c) $\operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \leq 0$

d) $\operatorname{ctg} \left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4} \right) \geq 1$

e) $\sin \left(\frac{2x - \pi}{4} \right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos \left(\frac{-x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \geq 0$

Odp. a) $x \in \left(\frac{-\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right), k \in \mathbf{Z}$ b) $x \in \left(\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$
 c) $x \in \left(\frac{-\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right), k \in \mathbf{Z}$ d) $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 3k\pi, \frac{3\pi}{2} + 3k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$
 e) $x \in \left(\frac{-13\pi}{6} + 4k\pi, \frac{7\pi}{6} + 4k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$ f) $x \in \left(\frac{-11\pi}{6} + 4k\pi, \frac{5\pi}{6} + 4k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

7.103. Rozwiąż nierówność:

a) $2\sin(\pi + 2x) < \sqrt{2}$ w przedziale $\left(-\pi, \frac{\pi}{2} \right)$
 b) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) + 1 < 0$ w przedziale $\left(\frac{-\pi}{2}, \pi \right)$
 c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0,5$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$
 d) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geq \frac{-\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi, 2\pi \rangle$
 e) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) \geq \sqrt{3}$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$
 f) $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x\right) + 1 \geq 0$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Odp. a) $x \in \left(-\pi, \frac{-3\pi}{8} \right) \cup \left(\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{2} \right)$
 b) $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{-5\pi}{12} \right) \cup \left(\frac{-\pi}{6}, \frac{-\pi}{12} \right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{12} \right)$
 c) $x \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right)$ d) $x \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi \right)$
 e) $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$ f) $x \in \left(-2\pi, \frac{-3\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$

7.104. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\operatorname{ctg}(2\pi x) < 1$ b) $\operatorname{tg}\pi < \sqrt{3}$ c) $2\sin\frac{\pi x}{3} \geq \sqrt{3}$

Odp. a) $x \in \left(\frac{4k+1}{8}, \frac{k+1}{2} \right), k \in \mathbf{Z}$

$$b) x \in \left(\frac{2k-1}{2}, \frac{3k+1}{3} \right), k \in \mathbf{Z}$$

$$c) x \in \langle 1+6k, 2+6k \rangle, k \in \mathbf{Z}$$

7.105. Rozwiąż nierówność:

$$a) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0 \text{ w przedziale } \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$b) (2\sin 2x + \sqrt{2}) \cdot \operatorname{tg} x < 0 \text{ w przedziale } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$c) \frac{2\cos x - 1}{\sin^2(\pi + x)} \geq 0 \text{ w zbiorze } \mathbf{R}$$

$$d) \frac{1 + 2\sin x}{4\cos^2 x - 3} \leq 0 \text{ w zbiorze } \mathbf{R}.$$

$$\text{Odp. a) } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \pi, \frac{11\pi}{6} \right\rangle \quad b) x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$$

$$c) x \in \left\langle -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z} \quad d) x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$$

7.106. Rozwiąż daną nierówność w zbiorze liczb rzeczywistych.

$$a) \sin x - 2\sin^2 x \geq 0$$

$$b) 2\cos^2 x + \cos x < 1$$

$$c) 4\cos^2 x + 2\sin^2 x < 5\cos x$$

$$d) 4(\sin^2 x - \cos x) \geq 1$$

$$e) \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3}) > -3$$

$$f) (\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}) \cdot \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$$

$$\text{Odp. a) } x \in \left\langle 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$$

$$b) x \in \left(-\pi + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$$

$$c) x \in \left(\frac{-\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z} \quad d) x \in \left\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$$

$$e) x \in \mathbf{R} - \left\{ a : a = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$f) \text{ wskazówka: } 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2; x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$$

7.107. Rozwiąż nierówność w danym przedziale.

a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} > \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \langle 0, 2\pi \rangle$

b) $\cos x \cdot (4\cos x - 3) \leq 3 - 4\cos^3 x, \left\langle -\pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

c) $\cos 2x + \cos 4x < 0, \langle 0, \pi \rangle$

d) $\sin 2x + |\cos x| \leq 0, \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

e) $\frac{4\sin^2 x - 4|\sin x| + 1}{1 - 2\cos^2 x} \leq 0, \langle 0, 2\pi \rangle$

f) $2|\sin^4 x - \cos^4 x| - 1 > 0, \langle -\pi, \pi \rangle$

Odp. a) $x \in \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right)$

b) $x \in \left\langle -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle \cup \{-\pi, \pi\}$

c) $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$

d) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle \cup \left\{ \frac{3\pi}{2} \right\}$

e) $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$

f) $x \in \left\langle -\pi, -\frac{5\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$

7.108. Rozwiąż nierówność:

a) $\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \cos^5 x + \dots \geq 1 + \cos x$

b) $2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg}^3 x + \dots \geq \sqrt{3} + 1$

c) $3\sin 2x + 3\sin^3 2x + 3\sin^5 2x + \dots > 2.$

Odp. a) $x \in \left\langle \frac{-\pi}{4} + k\pi, k\pi \right\rangle \cup \left\langle k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left(\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$