8. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Podział odcinka

6.1. **8.1.** Dane są punkty: $A(-3, 2)$, $B(4, -1)$, $C(5, 3)$. Oblicz współrzędne punktu D, jeśli:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$

Odp. a) $D(12, 0)$ b) $D(-2, 6)$ c) $D(-9, 9)$ d) $D\left(2\frac{2}{3}, 4\right)$

6.2. **8.2.** Dany jest punkt A oraz wektor $\overrightarrow{AB}$. Oblicz współrzędne punktu B.

a) $A(0, -3)$, $\overrightarrow{AB} = [2, -1]$ b) $A(-4, 0)$, $\overrightarrow{AB} = [3, 5]$

c) $A\left(7\frac{1}{2}, -6\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left[-4, 7\frac{3}{4}\right]$ d) $A\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left[\sqrt{3} + 3, 1 - 2\sqrt{3}\right]$

Odp. a) $B(2, -4)$ b) $B(-1, 5)$ c) $B\left(3\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right)$ d) $B\left(2\sqrt{3} + 3, 1\right)$

6.3. **8.3.** Dany jest punkt B oraz wektor $\overrightarrow{AB}$. Oblicz współrzędne punktu A.

a) $B(0, -8)$, $\overrightarrow{AB} = [-3, -2]$ b) $B\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left[1\frac{1}{6}, -\sqrt{2}\right]$

Odp. a) $A(3, -6)$ b) $A\left(1\frac{1}{3}, 2\sqrt{2}\right)$

6.4. **8.4.** Sprawdź, korzystając z równoległości wektorów, czy odcinki AB i CD są równoległe, jeśli:

a) $A(-4, -1)$, $B(3, 6)$, $C(1, -3)$, $D(2, -2)$

b) $A(0, 2)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(0, 6)$

Odp. a) tak b) nie

6.5. **8.5.** Wyznacz liczbę m, dla której wektory $\vec{u} = [m^2 - 1, -m]$ oraz $\vec{v} = [-1, m]$ są:

a) równe b) przeciwne c) równoległe.

Odp. a) $m = 0$ b) $m = \sqrt{2} \vee m = -\sqrt{2}$ c) $m \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

6.6. **8.6.** Dane są wektory: $\vec{u} = [2, -4]$, $\vec{v} = [-3, 4]$, $\vec{z} = [10, -2]$. Oblicz współrzędne i długość wektora:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{z} - \vec{u}$ c) $3\vec{v}$ d) $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{z}$

Odp. a) $\vec{u} + \vec{v} = [-1, 0]$; 1 b) $\vec{z} - \vec{u} = [8, 2]$; $2\sqrt{17}$ c) $3\vec{v} = [-9, 12]$; 15

d) $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{z} = [24, -10]$; 26

6.7. **8.7.** Dane są punkty $A(-3, 7)$, $B(5, 3)$. Odcinek AB podzielono na cztery odcinki równej długości. Oblicz współrzędne punktów podziału.

Odp. $(-1, 6)$, $(1, 5)$, $(3, 4)$

6.8. **8.8.** Punkt P jest środkiem odcinka AB. Wyznacz punkt B, jeśli:

a) $A(-3, 0)$, $P(-1, 2)$ b) $A(30, -20)$, $P(-6, -14)$

Odp. a) $B(1, 4)$ b) $B(-4, -8)$

6.9. **8.9.** Dane są punkty $A(-10, 7)$, $B(2, -11)$. Odcinek AB podzielono na

a) trzy odcinki równej długości b) pięć odcinków równej długości.

Oblicz współrzędne punktów podziału.

Odp. a) $(-6, 1)$, $(-2, -5)$ b) $\left(-7\frac{3}{5}, 3\frac{2}{5}\right)$, $\left(-5\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, $\left(-2\frac{4}{5}, -3\frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{2}{5}, -7\frac{2}{5}\right)$

6.10. **8.10.** Dane są punkty: $A(3, 5)$, $B(9, -7)$. Wyznacz współrzędne punktu P, należącego do odcinka AB wiedząc, że

a) $|AP| : |PB| = 5 : 1$ b) $|AP| : |PB| = 2 : 3$

Odp. a) $P(8, -5)$ b) $P\left(5\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

6.11. **8.11.** Dane są wierzchołki trójkąta ABC: $A(-4, -5)$, $B(1, -2)$, $C(-2, 3)$. Punkty D i E są środkami boków AC i BC. Oblicz współrzędne punktu M, będącego środkiem odcinka DE.

Odp. $M\left(-1\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

6.12. **8.12.** Punkt $S(1, 2)$ jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Wiedząc, że $A(-5, 3)$, $B(-2, -4)$, oblicz współrzędne punktów C i D.

Odp. $C(7, 1)$, $D(4, 8)$

6.13. **8.13.** Punkty $A(-4, 3)$, $B(-2, -3)$, $C(6, 1)$ oraz P są wierzchołkami równoległoboku. Oblicz współrzędne punktu P. Rozważ wszystkie przypadki.

Odp. $P(-12, -1)$ lub $P(8, -5)$ lub $P(5, 7)$

6.14 **8.14.** Dane są punkty: $A(-3, -2)$, $B(9, 2)$, $C(-3, 8)$. Oblicz:
a) długości środkowych AD, BE i CF trójkąta ABC
b) współrzędne środka ciężkości tego trójkąta
c) obwód trójkąta DEF.

Odp. a) $|AD| = \sqrt{85}$, $|BE| = \sqrt{145}$, $|CF| = 10$ b) $S\left(1, 2\frac{2}{3}\right)$ c) $2\sqrt{10} + 3\sqrt{5} + 5$

6.15. **8.15.** Punkty $D(4, -2)$, $E(6, 1)$, $F(0,3)$ są środkami boków odpowiednio AB, BC i AC trójkąta ABC. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

Odp. $A(-2, 0)$, $B(10, -4)$, $C(2, 6)$; *wskazówka:* Niech punkt M będzie środkiem odcinka DF. Uzasadnij, że punkt M jest również środkiem środkowej AE.

8.16. W trójkącie ABC dane są: punkt $B(4, -4)$ oraz środek ciężkości $S(2, 1)$. Wiedząc, że punkt M jest środkiem boku AB i $\overrightarrow{MB} = [3, -2]$, oblicz współrzędne wierzchołków A, C.

Odp. $A(-2, 0)$, $C(4, 7)$

8.17. W trójkącie ABC punkt $D(-3, 1)$ dzieli bok AB w stosunku $1 : 2$, licząc od wierzchołka A. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AC i DC oraz $\overrightarrow{MN} = [2, -1]$. Wiedząc, że $\overrightarrow{BC} = [-2, 10]$, oblicz współrzędne wierzchołków trójkąta ABC.

Odp. $A(-7, 3)$, $B(5, -3)$, $C(3, 7)$; *wskazówka:* Zauważ, że $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN}$ oraz $\overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{MN}$

Kąt między niezerowymi wektorami

8.18. Oblicz sinus kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:
a) $\vec{u} = \left[\sqrt{3}, \sqrt{6}\right]$, $\vec{v} = [2, 0]$
b) $\vec{u} = [-3, 4]$, $\vec{v} = [0, 5]$
c) $\vec{u} = [7, -1]$, $\vec{v} = [-2, 2]$
d) $\vec{u} = [12, -5]$, $\vec{v} = [6, 8]$

Odp. a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ c) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ d) $\sin\alpha = \frac{63}{65}$

8.19. Oblicz cosinus kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u} = [2\sqrt{2}, 1]$, $\vec{v} = [0, -5]$
b) $\vec{u} = [-\sqrt{5}, 2]$, $\vec{v} = [\sqrt{5}, 0]$
c) $\vec{u} = [-4, 8]$, $\vec{v} = [1, 2]$
d) $\vec{u} = [\sqrt{6}, 3\sqrt{2}]$, $\vec{v} = [2\sqrt{2}, 4]$

Odp. a) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ c) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$

8.20. Wyznacz miarę kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u} = [1, 2]$, $\vec{v} = [4, -2]$
b) $\vec{u} = [-3, 3]$, $\vec{v} = [2, 0]$
c) $\vec{u} = [-\sqrt{3}, 1]$, $\vec{v} = [1, 0]$
d) $\vec{u} = [-\sqrt{3}, -1]$, $\vec{v} = [2\sqrt{3}, -2]$

Odp. a) $\alpha = 90^\circ$ b) $\alpha = 135^\circ$ c) $\alpha = 150^\circ$ d) $\alpha = 120^\circ$

8.21. Oblicz długości boków oraz miary kątów trójkąta ABC, jeśli:

a) $A(-7, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-2, 4)$
b) $A(-4, -2\sqrt{3})$, $B(2, -2\sqrt{3})$, $C(-4, 4\sqrt{3})$
c) $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $B(3, \sqrt{3})$, $C(3+\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$
d) $A(0, 3)$, $B(3\sqrt{3}, 6)$, $C(-3\sqrt{3}, 6)$

Odp. a) $|AB| = \sqrt{68}$, $|AC| = |BC| = \sqrt{34}$, $\alpha = \beta = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
b) $|AB| = 6$, $|AC| = 6\sqrt{3}$, $|BC| = 12$, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
c) $|AB| = 3-\sqrt{3}$, $|BC| = 2\sqrt{3}$, $|AC| = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 15^\circ$
d) $|AB| = |AC| = 6$, $|BC| = 6\sqrt{3}$, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = \gamma = 30^\circ$

D **8.22.** Wykaż, że dane wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe.

a) $\vec{u} = [12, 9]$, $\vec{v} = [-3, 4]$
b) $\vec{u} = \left[-1, -\frac{1}{10}\right]$, $\vec{v} = \left[-\frac{1}{2}, 5\right]$

D **8.23.** Wykaż, że przekątne czworokąta $ABCD$ są prostopadłe, jeśli:

a) $A(-4, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(-4, 5)$, $D(-6, 3)$
b) $A(-8, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 11)$, $D(-12, 9)$

8.24. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których dane wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe.

a) $\vec{u}=[a, -2]$, $\vec{v}=[-4-a, a]$ b) $\vec{u}=[a-2, 3]$, $\vec{v}=[a-2, a^2+2a+4]$

Odp. a) $a \in \{-2, 4\}$ b) $a \in \{-1, 2\}$

8.25. Dane są wektory $\vec{u}=[1, 2]$, $\vec{v}=[3, -6]$, $\vec{p}=\left[a, -\frac{1}{2}\right]$. Wyznacz wartość parametru a, jeśli wiadomo, że wektory $\vec{r}=(a+1)\cdot\vec{u}+\vec{v}$ i $\vec{p}$, są prostopadłe.

Odp. $a \in \{-2, -1\}$

D **8.26.** Dane są wektory $\vec{u}=[3, -1]$, $\vec{v}=[-2, 5]$, $\vec{p}=[1, -2]$. Wykaż, że jeśli wektory $\vec{p}$ i $\vec{r}=a\cdot\vec{u}-b\cdot\vec{v}$, są prostopadłe, to $12b+5a=0$.

8.27. Dane są punkty $A(-2, -2)$, $B(4, 2)$. Wyznacz na osi OY punkt P tak, aby $|\sphericalangle APB|=90°$.

Odp. $P(0, 2\sqrt{3})$ lub $P(0, -2\sqrt{3})$

8.28. Dane są punkty $A(0, -2)$, $B(6, 0)$. Wyznacz na prostej k: $x-2y=0$ punkt P tak, aby kąt APB był prosty.

Odp. $P(0, 0)$ lub $P(4, 2)$

8.29. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Wiedząc, że $\overrightarrow{AB}=[8, 4]$, $\overrightarrow{DB}=[6, -2]$, oblicz:

a) obwód równoległoboku b) miarę kąta ostrego równoległoboku.

Odp. a) $4(2\sqrt{5}+\sqrt{10})$ b) $45°$

8.30. Oblicz cosinus kąta ostrego równoległoboku $ABCD$, jeśli:

a) $\overrightarrow{AB}=[6, 3]$, $\overrightarrow{DB}=[9, 0]$ b) $\overrightarrow{BC}=[2, 5]$, $\overrightarrow{CA}=[-11, 8]$

Odp. a) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ b) $\frac{47}{5\sqrt{290}}$