Wektory - powtórzenie z 1.klasy

WEKTORY

Wektory - wprowadzenie

Wektory zapisujemy korzystając z kwadratowych nawiasów np. $[3, 1]$.

Wektory - wprowadzenie

Wektory zapisujemy korzystając z kwadratowych nawiasów np. $[3, 1]$.

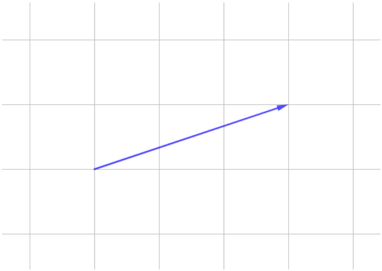
Każdy wektor można odczytywać jako instrukcję. $[3, 1]$ oznacza zwiększ pierwszą współrzędna o 3, a drugą współrzędną o 1.

Wektory - wprowadzenie

Wektory zapisujemy korzystając z kwadratowych nawiasów np. $[3, 1]$.

Każdy wektor można odczytywać jako instrukcję. $[3, 1]$ oznacza zwiększ pierwszą współrzędna o 3, a drugą współrzędną o 1.

Możemy ten wektor interpretować graficznie, jako strzełkę:

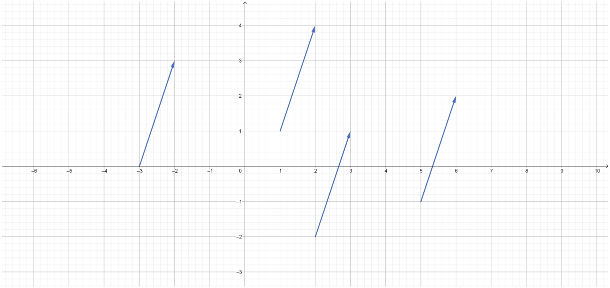


Wektory - wprowadzenie

W układzie współrzędnych wektory nie mają z góry zadanego położenia.

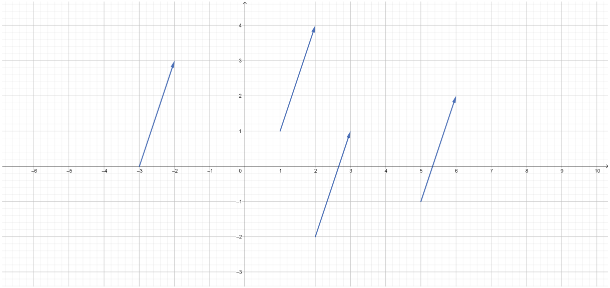
Wektory - wprowadzenie

W układzie współrzędnych wektory nie mają z góry zadanego położenia.



Wektory - wprowadzenie

W układzie współrzędnych wektory nie mają z góry zadanego położenia.



Wszystkie strzałki na powyższym rysunku reprezentują ten same wektor $[1, 3]$.

Wektory - wprowadzenie

Jeśli jakiś niezerowy wektor przyłożymy do danego punktu, to wskaże on nam inny punkt.

Wektory - wprowadzenie

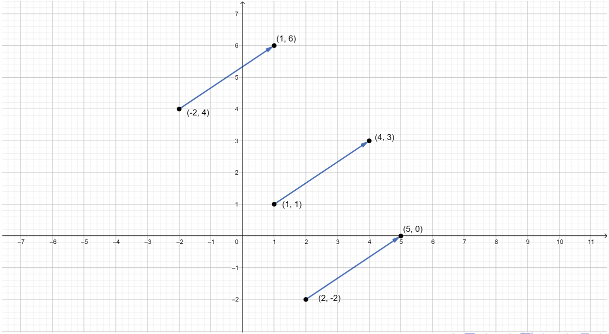
Jeśli jakiś niezerowy wektor przyłożymy do danego punktu, to wskaże on nam inny punkt.

Jeśli wektor $[3, 2]$ przyłożym kolejno do punktów $(1, 1), (-2, 4), (2, -2)$, to otrzymamy odpowiednio punkty $(4, 3), (1, 6), (5, 0)$. Ilustruje to poniższy rysunek:

Wektory - wprowadzenie

Jeśli jakiś niezerowy wektor przyłożymy do danego punktu, to wskaże on nam inny punkt.

Jeśli wektor $[3, 2]$ przyłożym kolejno do punktów $(1, 1), (-2, 4), (2, -2)$, to otrzymamy odpowiednio punkty $(4, 3), (1, 6), (5, 0)$. Ilustruje to poniższy rysunek:



Wektory - wprowadzenie

Mając dane dwa punkty możemy zapytać, jaki wektor prowadzi z jednego punktu do drugiego.

Wektory - wprowadzenie

Mając dane dwa punkty możemy zapytać, jaki wektor prowadzi z jednego punktu do drugiego. Przykładowo jeśli $A(-1,3)$ i $B(2,1)$, to wektor prowadzący z A do B to $\overrightarrow{AB} = [3,-2]$.

Wektory - wprowadzenie

Mając dane dwa punkty możemy zapytać, jaki wektor prowadzi z jednego punktu do drugiego. Przykładowo jeśli $A(-1,3)$ i $B(2,1)$, to wektor prowadzący z A do B to $\overrightarrow{AB} = [3,-2]$.

Jest to dosyć oczywiste - by dojść z A do B musimy zwiększyć pierwszą współrzędną o 3 i zmniejszyć drugą o 2.

Wektory - wprowadzenie

Mając dane dwa punkty możemy zapytać, jaki wektor prowadzi z jednego punktu do drugiego. Przykładowo jeśli $A(-1, 3)$ i $B(2, 1)$, to wektor prowadzący z A do B to $\overrightarrow{AB} = [3, -2]$.

Jest to dosyć oczywiste - by dojść z A do B musimy zwiększyć pierwszą współrzędną o 3 i zmniejszyć drugą o 2.

Możemy ewentualnie zastosować ogólną zasadę. Jeśli $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, to wektor z A do B to:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Wektory - wprowadzenie

Mając dane dwa punkty możemy zapytać, jaki wektor prowadzi z jednego punktu do drugiego. Przykładowo jeśli $A(-1,3)$ i $B(2,1)$, to wektor prowadzący z A do B to $\overrightarrow{AB} = [3,-2]$.

Jest to dosyć oczywiste - by dojść z A do B musimy zwiększyć pierwszą współrzędną o 3 i zmniejszyć drugą o 2.

Możemy ewentualnie zastosować ogólną zasadę. Jeśli $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, to wektor z A do B to:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Zauważmy przy okazji, że wektor z B do A, to $\overrightarrow{BA} = [-3,2]$.

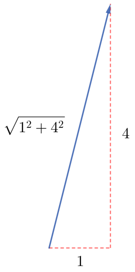
Długość wektora

Mając dany wektor możemy obliczyć jego długość korzystając z tw. Pitagorasa.

Długość wektora

Mając dany wektor możemy obliczyć jego długość korzystając z tw. Pitagorasa.

Przykładowo jeśli $\vec{v} = [1, 4]$, to jego długość $|\vec{v}|$ to:



$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Długość wektora

Jeśli chcemy znaleźć długość odcinka AB, to obliczymy najpierw wektor $\overrightarrow{AB}$, a następnie znajdziemy jego długość.

Długość wektora

Jeśli chcemy znaleźć długość odcinka AB, to obliczymy najpierw wektor $\overrightarrow{AB}$, a następnie znajdziemy jego długość.

Przykładowo dla $A(-2,2)$ i $B(1,1)$ mamy $\vec{AB} = [3,-1]$ i z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$.

Operacje na wektorach

Wektory możemy dodawać, odejmować i skalować (mnożyć przez liczbę rzeczywistą).

Operacje na wektorach

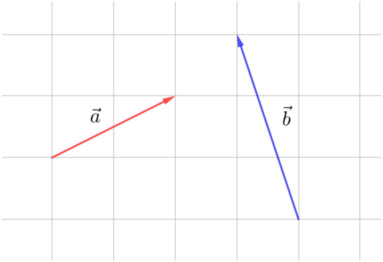
Wektory możemy dodawać, odejmować i skalować (mnożyć przez liczbę rzeczywistą).

Niech $\vec{a} = [2, 1], \vec{b} = [-1, 3]$.

Operacje na wektorach

Wektory możemy dodawać, odejmować i skalować (mnożyć przez liczbę rzeczywistą).

Niech $\vec{a} = [2, 1], \vec{b} = [-1, 3]$. Możemy te wektory reprezentować następująco:

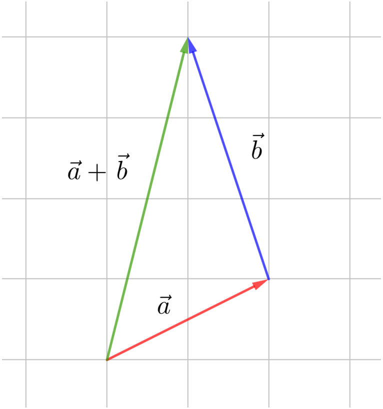


Operacje na wektorach - dodawanie

$\vec{a} + \vec{b} = [2, 1] + [-1, 3] = [1, 4].$

Operacje na wektorach - dodawanie

$\vec{a} + \vec{b} = [2, 1] + [-1, 3] = [1, 4]$. Graficznie:

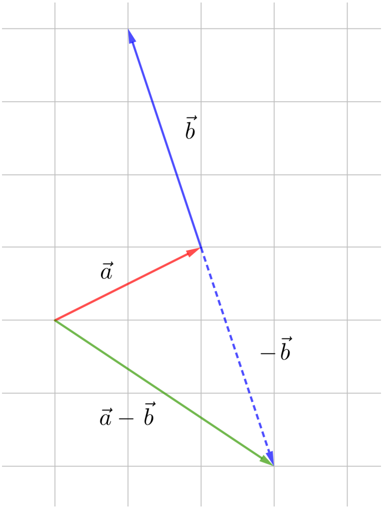


Operacje na wektorach - odejmowanie

$\vec{a} - \vec{b} = [2, 1] - [-1, 3] = [3, -2]$.

Operacje na wektorach - odejmowanie

$\vec{a} - \vec{b} = [2, 1] - [-1, 3] = [3, -2]$. Graficznie:



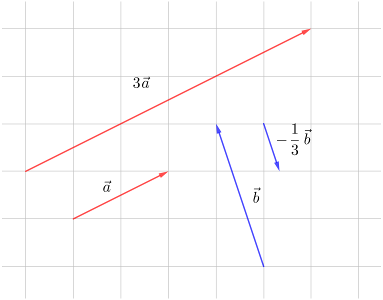
Operacje na wektorach - skalowanie

$3\vec{a} = 3[2,1] = [6,3]$,
$-\frac{1}{3}\vec{b} = -\frac{1}{3}[-1,3] = [-\frac{1}{3},1]$

Operacje na wektorach - skalowanie

$3\vec{a} = 3[2,1] = [6,3]$,
$-\frac{1}{3}\vec{b} = -\frac{1}{3}[-1,3] = [-\frac{1}{3},1]$

Graficznie:



Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:

Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:

równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,

Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:

- równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,
- przeciwne, gdy $v_x = -u_x$ oraz $v_y = -u_y$,

Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:

- równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,
- przeciwne, gdy $v_x = -u_x$ oraz $v_y = -u_y$,
- równoległe, gdy istnieje liczba rzeczywista p taka, że $v_x = p \cdot u_x$ oraz $v_y = p \cdot u_y$.

Czas na kilka ćwiczeń.

Przykład 1

Dane są punkty $A(3,1)$ oraz $B(-1,2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

Przykład 1

Dane są punkty $A(3,1)$ oraz $B(-1,2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{AB} = [-1-3, 2-1] = [-4, 1]$$

Zinterpretujmy ten wynik: by dojść z punktu A do punktu B musimy iść o 4 jednostki w lewo (zmniejszyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę do góry (zwiększyć współrzędną y o 1).

Przykład 1

Dane są punkty $A(3,1)$ oraz $B(-1,2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{AB} = [-1-3, 2-1] = [-4, 1]$$

Zinterpretujmy ten wynik: by dojść z punktu A do punktu B musimy iść o 4 jednostki w lewo (zmniejszyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę do góry (zwiększyć współrzędną y o 1).

$$\overrightarrow{BA} = [3-(-1), 1-2] = [4, -1]$$

By dojść z punktu B do punktu A musimy iść o 4 jednostki w prawo (zwiększyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę w dół (zmniejszyć współrzędną y o 1).

Przykład 1

Dane są punkty $A(3,1)$ oraz $B(-1,2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

Przykład 1

Dane są punkty $A(3,1)$ oraz $B(-1,2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

Pamiętajmy, że nie musimy na siłę stosować wzorów. By dojść z A do B muszę zmniejszyć współrzędną x o 4, a współrzędną y zwiększyć o 1. To przekłada się na wektor $[-4,1]$

Przykład 1

Dane są punkty $A(3, 1)$ oraz $B(-1, 2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

Pamiętajmy, że nie musimy na siłę stosować wzorów. By dojść z A do B muszę zmniejszyć współrzędną x o 4, a współrzędną y zwiększyć o 1. To przekłada się na wektor $[-4, 1]$

Analogicznie, by dojść z B do A, trzeba zwiększyć pierwszą współrzędną o 4 i zmniejszyć drugą o 1, co daje wektor $[4, -1]$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2, 3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3, -1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3, -1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $B(x_B, y_B)$, wtedy:

$$x_B - 2 = 3$$
$$y_B - 3 = -1$$

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3,-1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $B(x_B, y_B)$, wtedy:

$$x_B - 2 = 3$$
$$y_B - 3 = -1$$

Otrzymujemy $x_B = 5$ oraz $y_B = 2$, czyli $B(5,2)$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3,-1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3,-1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Prostsza interpretacja jest następująca: skoro $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, to znaczy, że wektor $\vec{v}$ ma nas prowadzić z punktu A do punktu B. Startując z $A(2,3)$ mamy zwiększyć współrzędną x o 3 i zmniejszyć współrzędną y o 1. Otrzymujemy $B(5,2)$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1,5)$ oraz wektor $\vec{v} = [1,-2]$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1,5)$ oraz wektor $\vec{v} = [1, -2]$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$1 - x_A = 1$$
$$5 - y_A = -2$$

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1,5)$ oraz wektor $\vec{v} = [1, -2]$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$1 - x_A = 1$$
$$5 - y_A = -2$$

Otrzymujemy $x_A = 0$ oraz $y_A = 7$, czyli $A(0,7)$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1,5)$ oraz wektor $\vec{v} = [1,-2]$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$1 - x_A = 1$$
$$5 - y_A = -2$$

Otrzymujemy $x_A = 0$ oraz $y_A = 7$, czyli $A(0,7)$.

Ale lepiej policzyć, że $\overrightarrow{BA} = -\vec{v} = [-1,2]$ i przyłożyć ten wektor do punktu B, by otrzymać punkt A.

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n, dla których wektory $\vec{v} = [2m - 3, 3m]$ oraz $\vec{u} = [n, n - 5]$ są przeciwne.

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n, dla których wektory $\vec{v} = [2m - 3, 3m]$ oraz $\vec{u} = [n, n - 5]$ są przeciwne.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} 2m - 3 &= -n \\ 3m &= -(n - 5) \end{aligned}$$

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n, dla których wektory $\vec{v} = [2m - 3, 3m]$ oraz $\vec{u} = [n, n - 5]$ są przeciwne.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} 2m - 3 &= -n \\ 3m &= -(n - 5) \end{aligned}$$

Otrzymujemy $m = 2$ oraz $n = -1$.

Przykład 5

Znajdź wartości parametrów k, dla którego wektory $\vec{v} = [2, k]$ oraz $\vec{u} = [-4, 1]$ są równoległe.

Przykład 5

Znajdź wartości parametrów k, dla którego wektory $\vec{v} = [2, k]$ oraz $\vec{u} = [-4, 1]$ są równoległe.

Rozwiązujemy układ równań

$$2 = p \cdot (-4)$$
$$k = p \cdot 1$$

Przykład 5

Znajdź wartości parametrów k, dla którego wektory $\vec{v} = [2, k]$ oraz $\vec{u} = [-4, 1]$ są równoległe.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} 2 &= p \cdot (-4) \\ k &= p \cdot 1 \end{aligned}$$

Otrzymujemy $k = -\frac{1}{2}$.

Przykład 6

Oblicz długość wektora $\vec{v} = [2, -1]$

Przykład 6

Oblicz długość wektora $\vec{v} = [2, -1]$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1,-3)$ od punktu $B(2,1)$.

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1, -3)$ od punktu $B(2, 1)$. Znajdujemy wektor

$\overrightarrow{AB} = [1, 4]$ i obliczamy jego długość

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1,-3)$ od punktu $B(2,1)$. Znajdujemy wektor

$\overrightarrow{AB} = [1,4]$ i obliczamy jego długość

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Oczywiście zamiast wektora $\overrightarrow{AB}$ mogliśmy znaleźć wektor $\overrightarrow{BA}$ i obliczyć jego długośc - wynik byłby ten sam.

Ćwiczenia ze zbioru

Przerobimy teraz wybrane podpunkty z zadań 6.1, 6.2, 6.4, 6.7, 6.8, 6.9 oraz w całości zadania 6.10, 6.12 i 6.14.

Ćwiczenia ze zbioru

Przerobimy teraz wybrane podpunkty z zadań 6.1, 6.2, 6.4, 6.7, 6.8, 6.9 oraz w całości zadania 6.10, 6.12 i 6.14.

Na prezentacji nie będę zamieszczał treści zadań, więc proszę mieć otwarty zbiór przerabiając ten materiał.

Ćwiczenia ze zbioru

Przerobimy teraz wybrane podpunkty z zadań 6.1, 6.2, 6.4, 6.7, 6.8, 6.9 oraz w całości zadania 6.10, 6.12 i 6.14.

Na prezentacji nie będę zamieszczał treści zadań, więc proszę mieć otwarty zbiór przerabiając ten materiał.

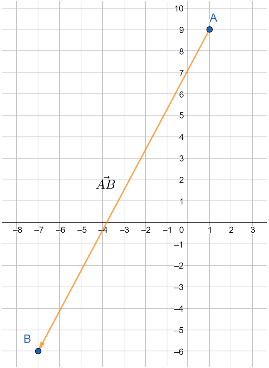
Wszystkie pozostałe podpunkty i zadania z tego rozdziału powinniście przerobić samodzielnie.

Zadanie 6.1 c

Chcemy obliczyć długość odcinka.

Zadanie 6.1 c

Chcemy obliczyć długość odcinka.

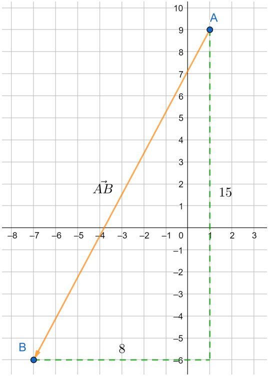


Zadanie 6.1 c

Możemy skorzystać bezpośrednio ze wzoru lub obliczyć wektor $\overrightarrow{AB}$ i z tw. Pitgarosa obliczyć jego długość:

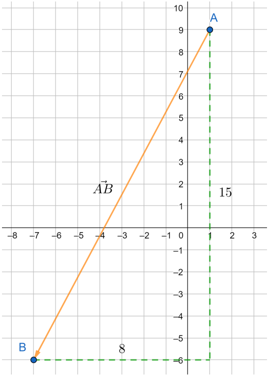
Zadanie 6.1 c

Możemy skorzystać bezpośrednio ze wzoru lub obliczyć wektor $\overrightarrow{AB}$ i z tw. Pitgarosa obliczyć jego długość:



Zadanie 6.1 c

Możemy skorzystać bezpośrednio ze wzoru lub obliczyć wektor $\overrightarrow{AB}$ i z tw. Pitgarosa obliczyć jego długość:



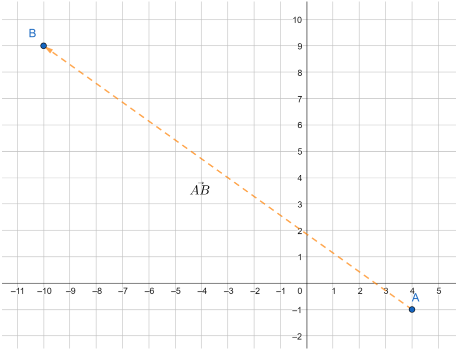
$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$$

Zadanie 6.2 c

Chcemy obliczyć środek odcinak AB.

Zadanie 6.2 c

Chcemy obliczyć środek odcinak AB.

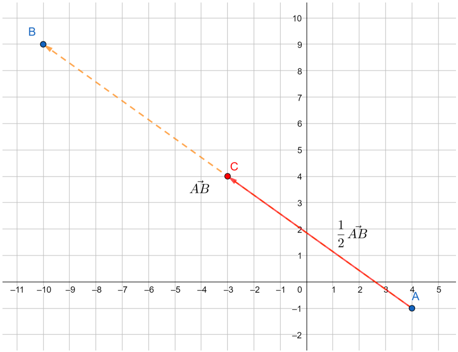


Zadanie 6.2 c

Obliczymy wektor $\overrightarrow{AB}$ i połowę tego wektora przyłożymy do punktu A:

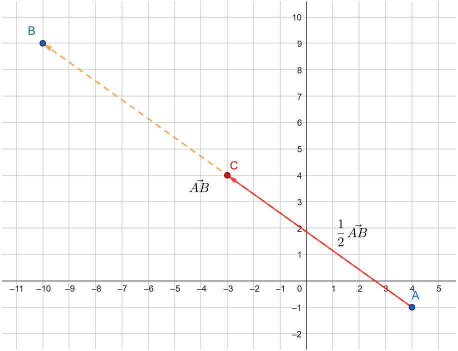
Zadanie 6.2 c

Obliczymy wektor $\overrightarrow{AB}$ i połowę tego wektora przyłożymy do punktu A:



Zadanie 6.2 c

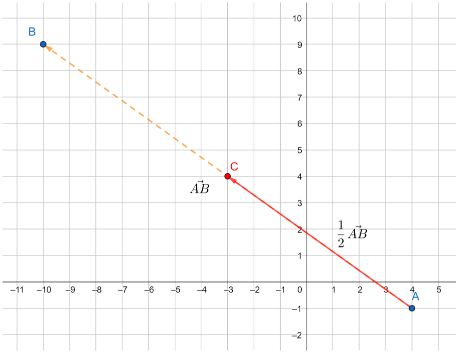
Obliczymy wektor $\overrightarrow{AB}$ i połowę tego wektora przyłożymy do punktu A:



$\overrightarrow{AB} = [-14, 10]$, czyli $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = [-7, 5]$.

Zadanie 6.2 c

Obliczymy wektor $\overrightarrow{AB}$ i połowę tego wektora przyłożymy do punktu A:



$\overrightarrow{AB} = [-14, 10]$, czyli $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = [-7, 5]$. Przykładając do punktu A otrzymujemy środek odcinka $C(-3, 4)$.

Zadanie 6.2 c

Bardzo łatwo pokazać, przy użyciu wektorów, że środek odcinka AB ma współrzędne, które są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych punktów A i B.

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

.

Zadanie 6.2 c

Bardzo łatwo pokazać, przy użyciu wektorów, że środek odcinka AB ma współrzędne, które są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych punktów A i B.

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

.

Korzystając z tego wzoru mogliśmy rozwiązać zadanie 6.2 w jednym kroku, więc warto ten wzór pamiętać.

Zadanie 6.2 c

Bardzo łatwo pokazać, przy użyciu wektorów, że środek odcinka AB ma współrzędne, które są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych punktów A i B.

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

.

Korzystając z tego wzoru mogliśmy rozwiązać zadanie 6.2 w jednym kroku, więc warto ten wzór pamiętać.

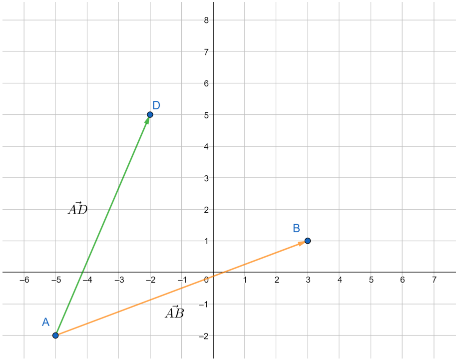
Spróbujcie samodzielnie go udowodnić.

Zadanie 6.4 b

Zacznijmy od rysunku. Od razu zaznaczymy wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{AD}$:

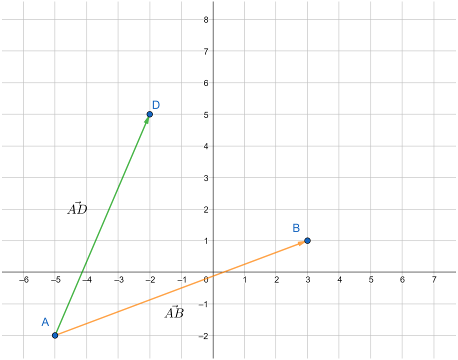
Zadanie 6.4 b

Zacznijmy od rysunku. Od razu zaznaczymy wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{AD}$:



Zadanie 6.4 b

Zacznijmy od rysunku. Od razu zaznaczymy wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{AD}$:



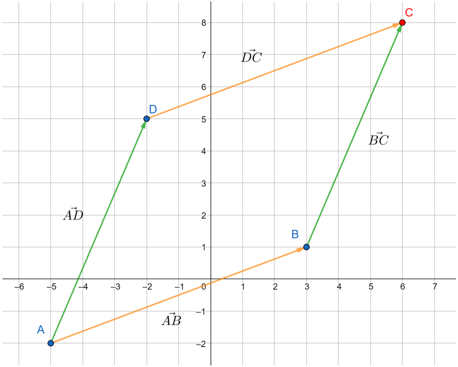
$\overrightarrow{AB} = [8, 3]$ i $\overrightarrow{AD} = [3, 7]$

Zadanie 6.4 b

Ponieważ $ABCD$ jest równoległobokiem mamy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ oraz $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$:

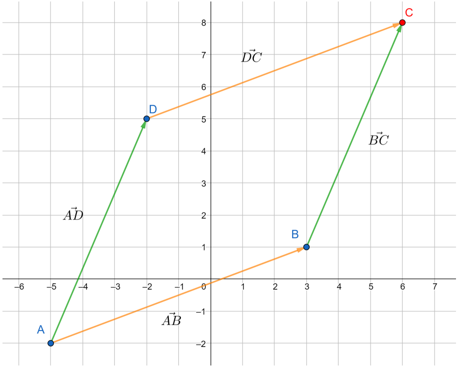
Zadanie 6.4 b

Ponieważ $ABCD$ jest równoległobokiem mamy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ oraz $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$:



Zadanie 6.4 b

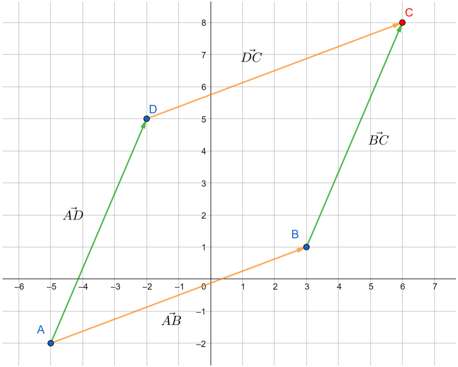
Ponieważ $ABCD$ jest równoległobokiem mamy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ oraz $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$:



By obliczyć punkt C, możemy np. przyłożyć $\overrightarrow{AB}$ do punktu D.

Zadanie 6.4 b

Ponieważ $ABCD$ jest równoległobokiem mamy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ oraz $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$:



By obliczyć punkt C, możemy np. przyłożyć $\overrightarrow{AB}$ do punktu D. Otrzymujemy $C(6, 8)$.

Zadanie 6.4 b

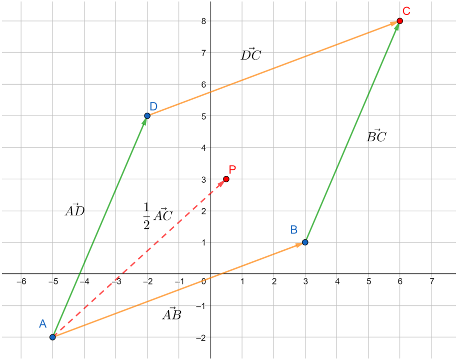
By obliczyć punkt przecięcia się przekątnych, musimy pamiętać, że przecinają się one w połowie.

Zadanie 6.4 b

By obliczyć punkt przecięcia się przekątnych, musimy pamiętać, że przecinają się one w połowie. Możemy więc obliczyć wektor $\overrightarrow{AC}$ i jego połowę przyłożyć do punktu A:

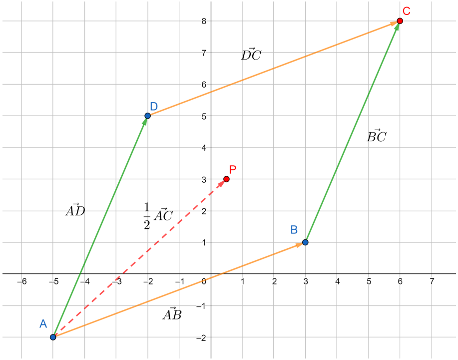
Zadanie 6.4 b

By obliczyć punkt przecięcia się przekątnych, musimy pamiętać, że przecinają się one w połowie. Możemy więc obliczyć wektor $\overrightarrow{AC}$ i jego połowę przyłożyć do punktu A:



Zadanie 6.4 b

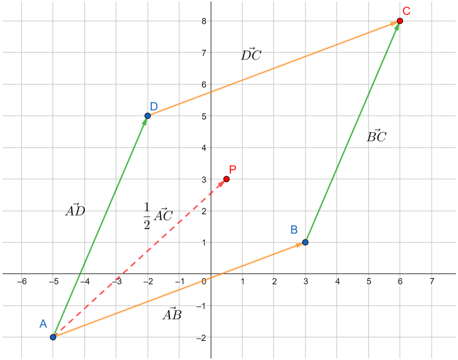
By obliczyć punkt przecięcia się przekątnych, musimy pamiętać, że przecinają się one w połowie. Możemy więc obliczyć wektor $\overrightarrow{AC}$ i jego połowę przyłożyć do punktu A:



Możemy też po prostu obliczyć środek odcinka AC (lub BD) korzystając ze wzoru.

Zadanie 6.4 b

By obliczyć punkt przecięcia się przekątnych, musimy pamiętać, że przecinają się one w połowie. Możemy więc obliczyć wektor $\overrightarrow{AC}$ i jego połowę przyłożyć do punktu A:



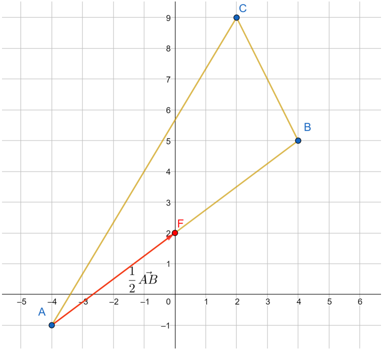
Możemy też po prostu obliczyć środek odcinka AC (lub BD) korzystając ze wzoru. Otrzymujemy $P(0.5, 3)$.

Zadanie 6.7 c

Rysujemy trójkąt i znajdujemy współrzędne punktu F:

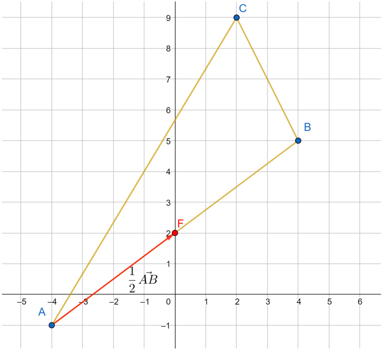
Zadanie 6.7 c

Rysujemy trójkąt i znajdujemy współrzędne punktu F:



Zadanie 6.7 c

Rysujemy trójkąt i znajdujemy współrzędne punktu F:



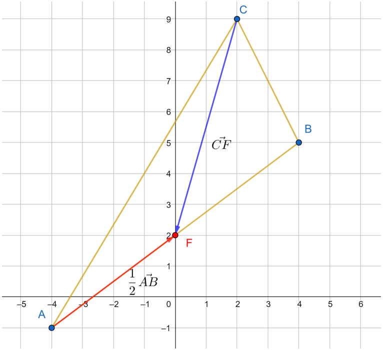
Otrzymujemy $F(0, 2)$.

Zadanie 6.7 c

Teraz obliczamy wektor $\overrightarrow{CF}$:

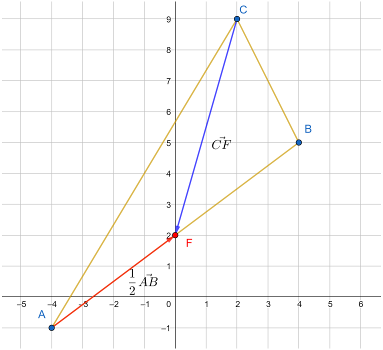
Zadanie 6.7 c

Teraz obliczamy wektor $\overrightarrow{CF}$:



Zadanie 6.7 c

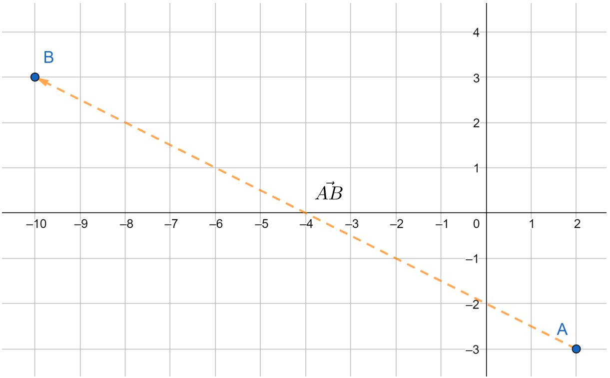
Teraz obliczamy wektor $\overrightarrow{CF}$:



Otrzymujemy $\overrightarrow{CF} = [-2, -7]$ i z tw. Pitagorasa: $|CF| = |\overrightarrow{CF}| = \sqrt{53}$

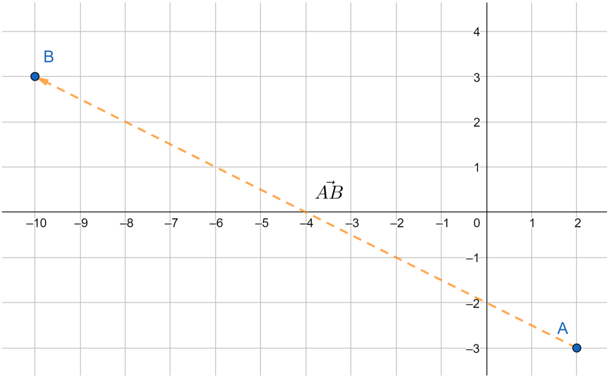
Zadanie 6.8 b

Zróbmy rysunek:



Zadanie 6.8 b

Zróbmy rysunek:



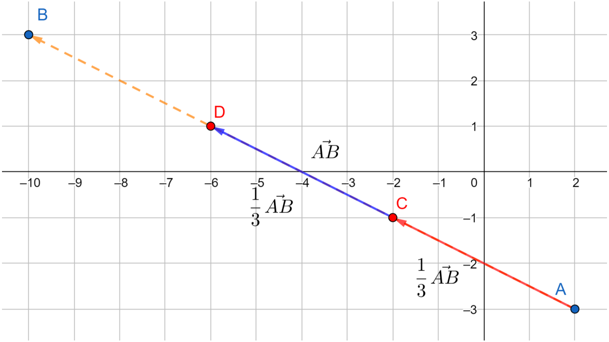
Mamy wektor $\overrightarrow{AB} = [-12, 6]$

Zadanie 6.8 b

Obliczamy $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [-4, 2]$ i przykładamy do punktu A, by obliczyć pierwszy punkt podziału, a następnie do obliczonego punktu, by obliczyć kolejny:

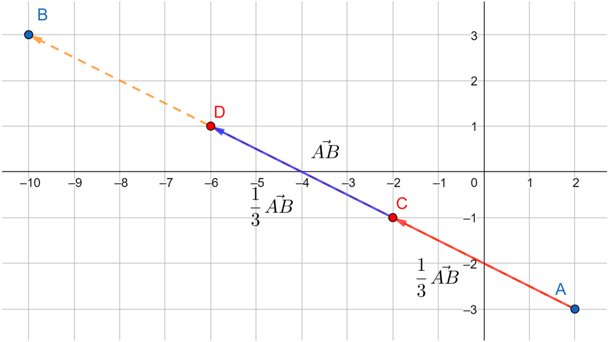
Zadanie 6.8 b

Obliczamy $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [-4, 2]$ i przykładamy do punktu A, by obliczyć pierwszy punkt podziału, a następnie do obliczonego punktu, by obliczyć kolejny:



Zadanie 6.8 b

Obliczamy $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = [-4, 2]$ i przykładamy do punktu A, by obliczyć pierwszy punkt podziału, a następnie do obliczonego punktu, by obliczyć kolejny:



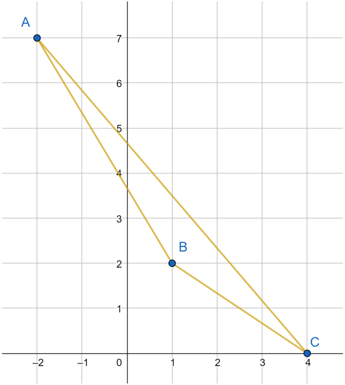
Otrzymujemy $C(-2, -1)$ i $D(-6, 1)$.

Zadanie 6.9 c

Rysunek:

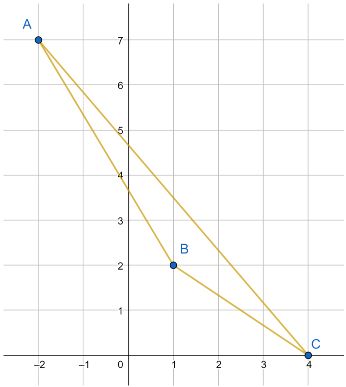
Zadanie 6.9 c

Rysunek:



Zadanie 6.9 c

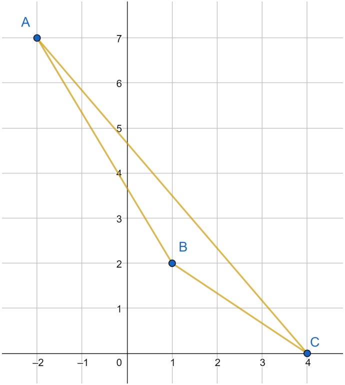
Rysunek:



Musimy pamiętać, że środkowa to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

Zadanie 6.9 c

Rysunek:



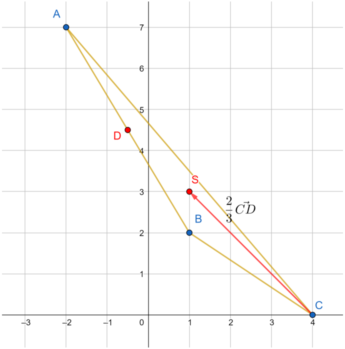
Musimy pamiętać, że środkowa to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku. Punkt przecięcia środkowych dzieli je w stosunku 2:1.

Zadanie 6.9 c

Obliczamy środek odcinka AB (nazwijmy go D) oraz wektor $\overrightarrow{CD}$ i dwie trzecie tego wektora przyłożym do punktu C:

Zadanie 6.9 c

Obliczamy środek odcinka AB (nazwijmy go D) oraz wektor $\overrightarrow{CD}$ i dwie trzecie tego wektora przyłożym do punktu C:



Otrzymujemy $S(1,3)$.

Zadanie 6.9 c

Punkt przecięcia się środkowych możemy też obliczyć bezpośrednio ze wzoru:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

Zadanie 6.9 c

Punkt przecięcia się środkowych możemy też obliczyć bezpośrednio ze wzoru:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

Znów warto ten wzór kojarzyć, gdyż przyspiesza rozwiązanie.

Zadanie 6.9 c

Punkt przecięcia się środkowych możemy też obliczyć bezpośrednio ze wzoru:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

Znów warto ten wzór kojarzyć, gdyż przyspiesza rozwiązanie.

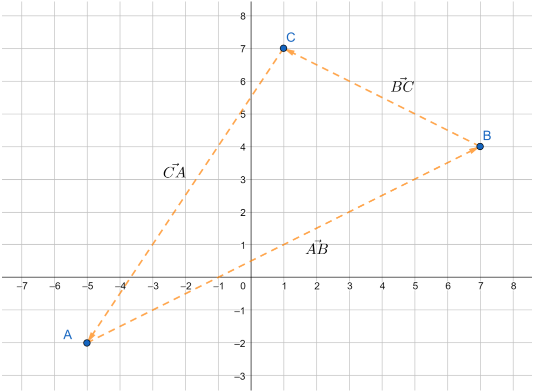
Spróbujcie go udowodnić korzystając z wektorów.

Zadanie 6.10

Rysujemy trójkąt i odpowiednie wektory:

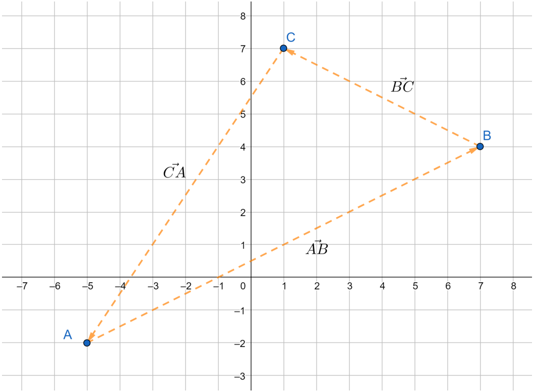
Zadanie 6.10

Rysujemy trójkąt i odpowiednie wektory:



Zadanie 6.10

Rysujemy trójkąt i odpowiednie wektory:



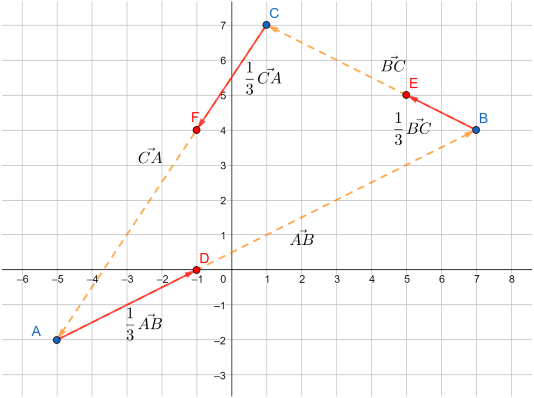
Mamy $\overrightarrow{AB} = [12, 6]$, $\overrightarrow{BC} = [-6, 3]$ i $\overrightarrow{CA} = [-6, -9]$,

Zadanie 6.10

Znajdujemy punkty D, E i F przykładając jedną trzecią odpowiednich wektorów do wierzchołków trójkąta:

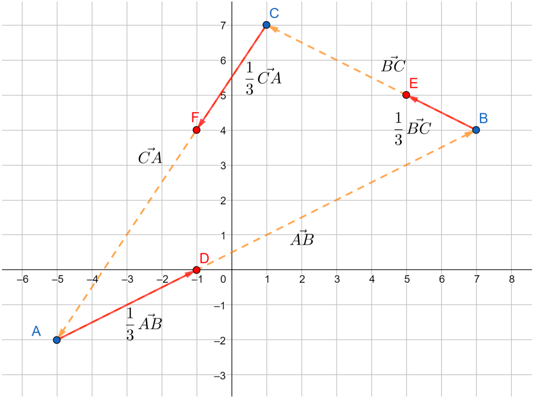
Zadanie 6.10

Znajdujemy punkty D, E i F przykładając jedną trzecią odpowiednich wektorów do wierzchołków trójkąta:



Zadanie 6.10

Znajdujemy punkty D, E i F przykładając jedną trzecią odpowiednich wektorów do wierzchołków trójkąta:



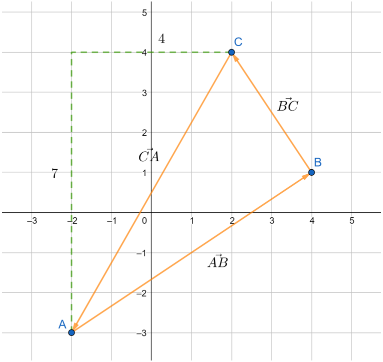
Otrzymujemy $D(-1,0)$, $E(5,5)$ oraz $F(-1,4)$.

Zadanie 6.12

Rysunek:

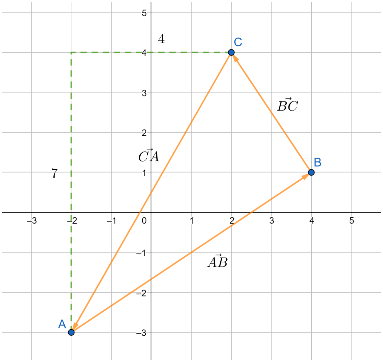
Zadanie 6.12

Rysunek:



Zadanie 6.12

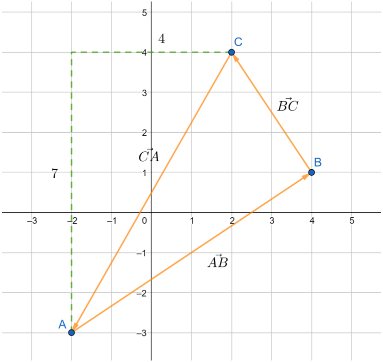
Rysunek:



Widzimy, że kąt prosty jest zapewne przy wierzchołku B.

Zadanie 6.12

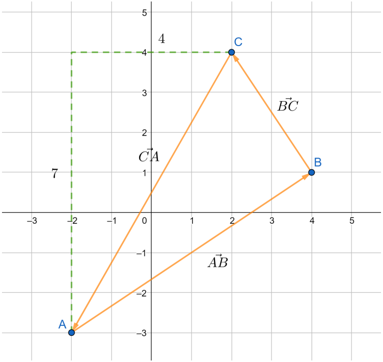
Rysunek:



Widzimy, że kąt prosty jest zapewne przy wierzchołku B.
Obliczamy długości poszczególnych boków

Zadanie 6.12

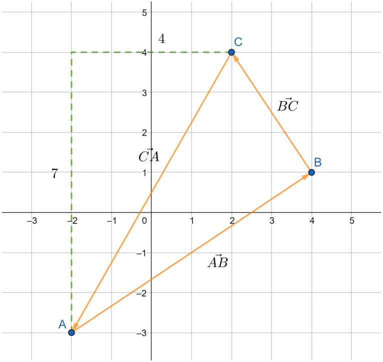
Rysunek:



Widzimy, że kąt prosty jest zapewne przy wierzchołku B.
Obliczamy długości poszczególnych boków $|AC| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$.

Zadanie 6.12

Rysunek:



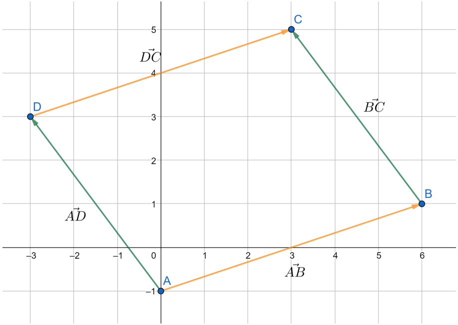
Widzimy, że kąt prosty jest zapewne przy wierzchołku B.
Obliczamy długości poszczególnych boków $|AC| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$.
Analogicznie obliczamy $|AB| = \sqrt{52}$ oraz $|BC| = \sqrt{13}$.

Zadanie 6.12

Mamy $|AB|^2 + |BC|^2 = 65 = |AC|^2$, a więc z twierdzenia odwrotne do tw. Pitagorasa wnioskujemy, że trójkąt ABC jest prostokątny.

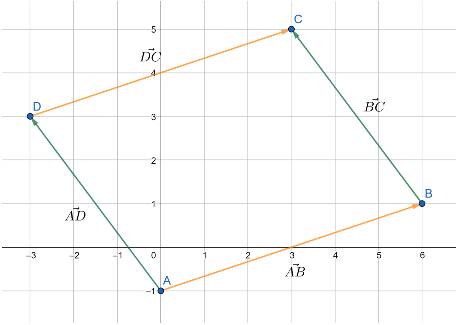
Zadanie 6.14

Zaczynamy od rysunku:



Zadanie 6.14

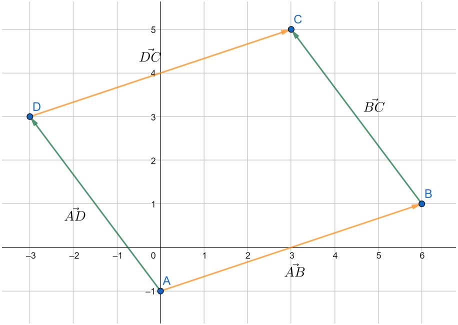
Zaczynamy od rysunku:



Musimy pokazać, że odpowiednie wektory są równe.

Zadanie 6.14

Zaczynamy od rysunku:



Musimy pokazać, że odpowiednie wektory są równe.

$\overrightarrow{AD} = [-3, 4] = \overrightarrow{BC}$ oraz $\overrightarrow{AB} = [6, 2] = \overrightarrow{DC}$, a więc $ABCD$ jest równoległobokiem.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.