

- 6.28. **8.43.** Wyznacz współrzędne punktu przecięcia się wysokości w trójkącie  $ABC$ , jeśli  $A(-3, 0)$ ,  $B(9, -6)$ ,  $C(5, 6)$ .

Odp.  $(3, 2)$

**8.44.** Wyznacz równanie prostej  $l$  przechodzącej przez punkt  $A$ , która tworzy z osią odciętych kąt o mierze dwa razy większej od kąta, jaki tworzy z tą osią prosta  $k$ , jeśli:

- a)  $k: y = 3x + 1$ ,  $A(16, -1)$                       b)  $k: y = 0,5x + 3$ ,  $A(6, -8)$

Odp. a)  $l: y = -\frac{3}{4}x + 11$ ; *wskazówka*: Niech  $\alpha$  oznacza kąt nachylenia prostej  $k$  do osi  $OX$ ,

$a$  – współczynnik kierunkowy prostej  $l$ ; wówczas  $a = \operatorname{tg} 2\alpha$ .    b)  $y = \frac{4}{3}x - 16$

**8.45.** Dane są równania prostych  $k$  i  $l$ . Wyznacz miarę kąta ostrego, jaki tworzą proste  $k$  i  $l$ .

a)  $k: y = 5x + 4$ ,  $l: y = -1,5x - 2$

b)  $k: y = -5$ ,  $l: y = \sqrt{3}x + 2$

c)  $k: x + 3 = 0$ ,  $l: \sqrt{3}x + y + 1 = 0$

d)  $k: x - 4y + 2 = 0$ ,  $l: 3x + 5y - 6 = 0$

Odp. a)  $45^\circ$     b)  $60^\circ$     c)  $30^\circ$     d)  $45^\circ$ ; *wskazówka*: I sposób. Wyznacz dwa dowolne niezerowe wektory zawarte w prostych  $k$  i  $l$ . Następnie oblicz miarę kąta między tymi wektorami.

II sposób. Niech  $\alpha$  oznacza kąt nachylenia prostej  $k$  do osi  $OX$ ,  $\beta$  – kąt nachylenia prostej  $l$  do osi  $OX$ ; wówczas  $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ ,  $\beta \in (90^\circ, 180^\circ)$ . Oblicz  $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$ .

## Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi

- 6.29. **8.46.** Oblicz odległość punktu  $P(-2, 3)$  od prostej  $k$ , jeśli:

a)  $k: x - 7 = 0$

b)  $k: y + 1 = 0$

c)  $k: 7x - y + 17 = 0$

d)  $k: 3x + 4y + 5 = 0$

Odp. a) 9    b) 4    c) 0    d)  $2\frac{1}{5}$

- 6.30. **8.47.** Dana jest prosta  $k: 4x - 3y + C = 0$  oraz punkt  $P(-1, 1)$ . Wyznacz liczbę  $C$ , dla której odległość punktu  $P$  od prostej  $k$  jest równa:

a) 1

b) 15

c) 0

d)  $\sqrt{7}$

Odp. a)  $C = 12$  lub  $C = 2$     b)  $C = -68$  lub  $C = 82$     c)  $C = 7$

d)  $C = 7 - 5\sqrt{7}$  lub  $C = 7 + 5\sqrt{7}$

6.31. **8.48.** Dana jest prosta  $k: 8x - 15y + 7 = 0$ . Wyznacz liczbę  $a$ , dla której odległość punktu  $P(a, 3)$  od prostej  $k$  jest równa:

- a) 2                                      b) 0                                      c) 13                                      d) 10

Odp. a)  $a = 9$  lub  $a = 0,5$     b)  $a = 4,75$     c)  $a = 32\frac{3}{8}$  lub  $a = -22\frac{7}{8}$

d)  $a = 26$  lub  $a = -16,5$

6.32. **8.49.** Dana jest prosta  $k: -2x + y + 3 = 0$ . Wyznacz liczbę  $a$ , dla której punkt  $P$  leży w odległości  $2\sqrt{5}$  od prostej  $k$ , jeśli:

- a)  $P(1, a)$                                       b)  $P(3a, 4)$                                       c)  $P(a, 2a)$                                       d)  $P(a + 2, a - 1)$

Odp. a)  $a = 9$  lub  $a = -11$     b)  $a = -\frac{1}{2}$  lub  $a = 2\frac{5}{6}$

c) nie istnieje taka liczba  $a$     d)  $a = 8$  lub  $a = -12$

6.33. **8.50.** Oblicz odległość między prostymi równoległymi  $k$  i  $l$ , jeśli:

a)  $k: x + y + 2 = 0$                        $l: x + y - 4 = 0$

b)  $k: x + 6 = 0$                                $l: 5x - 10 = 0$

c)  $k: 2x - y + 3 = 0$                        $l: -3x + 1,5y - 2 = 0$

d)  $k: 5y + 7 = 0$                                $l: 3y - 20 = 0$

Odp. a)  $3\sqrt{2}$     b) 8    c)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$     d)  $8\frac{1}{15}$

6.34. **8.51.** Wykaż, że prosta  $k: 2x - y - 1 = 0$  jest równo oddalona od prostych  $m: 2x - y + 9 = 0$  oraz  $n: 2x - y - 11 = 0$ .

6.35. **8.52.** Wyznacz równanie prostej  $l$ , równoległej do prostej  $k: 8x - 15y + 21 = 0$  i leżącej w odległości 4 od prostej  $k$ .

Odp.  $l: 8x - 15y + 89 = 0$  lub  $l: 8x - 15y - 47 = 0$

6.36. **8.53.** Dany jest trapez  $ABCD$ , gdzie  $A(3, -2)$ ,  $B(3, 3)$ ,  $C(0, 4)$ ,  $D(-15, 4)$ .

a) Które boki trapezu są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

b) Oblicz wysokość tego trapezu.

Odp. a)  $DA \parallel CB$     b)  $h = 1,5\sqrt{10}$

6.37. **8.54.** Wyznacz równanie prostej  $l$ , równoległej do prostej  $k: 6x - 8x + 1 = 0$  i leżącej w odległości 3 od punktu  $P(-7, -2)$ .

Odp.  $3x - 4y + 28 = 0$  lub  $3x - 4y - 2 = 0$

6.38. **8.55.** Dany jest trójkąt  $ABC$ , gdzie  $A(-2, 3)$ ,  $B(-2, 2)$ ,  $C(2, 0)$ . Wyznacz:

- a) równania ogólne prostych zawierających boki tego trójkąta  
b) wysokości tego trójkąta.

Odp. a) pr.  $AB: x + 2 = 0$ , pr.  $BC: x + 2y - 2 = 0$ , pr.  $AC: 3x + 4y - 6 = 0$

$$b) h_A = \frac{2\sqrt{5}}{5}, h_B = 0,8, h_C = 4$$

6.39. **8.56.** Punkty  $A(-1, 7)$ ,  $B(-2, 0)$ ,  $C(3, -5)$  są wierzchołkami rombu  $ABCD$ . Bez wyznaczania współrzędnych wierzchołka  $D$  oblicz:

- a) wysokość rombu  
b) długość przekątnej  $BD$ .

Odp. a)  $h = d(A, \text{pr. } BC) = 4\sqrt{2}$     b)  $|BD| = 2 \cdot d(B, \text{pr. } AC) = 2\sqrt{10}$

6.40. **8.57.** Punkty  $A(-6, 2)$ ,  $B(-4, -2)$ ,  $C(4, 0)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ . Bez wyznaczania współrzędnych wierzchołka  $D$  oblicz dwie różne wysokości tego równoległoboku.

Odp.  $h_1 = \frac{18}{\sqrt{17}}$ ,  $h_2 = \frac{18}{\sqrt{5}}$

6.41. **8.58.** Wyznacz równanie prostej  $l$ , prostopadłej do prostej  $k: 2x - 3y + 1 = 0$  i leżącej w odległości  $2\sqrt{13}$  od punktu  $P(-3, 4)$ .

Odp.  $3x + 2y - 25 = 0$  lub  $3x + 2y + 27 = 0$

**8.59.** Na osi  $OX$  wyznacz punkt  $P$ , który jest równoodległy od prostych  $k: x - y + 3 = 0$  oraz  $m: 7x + y - 1 = 0$ .

Odp.  $P_1(8, 0)$  lub  $P_2\left(-1\frac{1}{6}, 0\right)$

**8.60.** Na osi  $OY$  wyznacz punkt  $P$ , który jest równoodległy od prostych  $k: 2x + y - 1 = 0$  oraz  $m: 11x - 2y + 1 = 0$ .

Odp.  $P_1\left(0, \frac{6}{7}\right)$  lub  $P_2\left(0, 1\frac{1}{3}\right)$

**8.61.** Wyznacz równanie prostej, do której należy punkt  $P(1, -1)$  i takiej, że odległość punktu  $Q(8, -2)$  od tej prostej wynosi 5.

Odp.  $3x - 4y - 7 = 0$  lub  $4x + 3y - 1 = 0$

**8.62.** Wyznacz równanie prostej, do której należy punkt  $P(-6, 15)$  i takiej, że odległość punktu  $Q(4, -5)$  od tej prostej wynosi 10.

Odp.  $x + 6 = 0$  lub  $3x + 4y - 42 = 0$

## Pole trójkąta. Pole wielokąta

6.42. **8.63.** Oblicz pole trójkąta  $ABC$ , jeśli:

a)  $A(1, 1), B(3, 5), C(-1, 3)$

b)  $A(-4, 5), B(6, -2), C(3, 4)$

Odp. a) 6 b) 19,5

6.43. **8.64.** Dane są punkty  $A(-5, -2), B(3, -3), C(-1, 5)$ .

**D** a) Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest równoramienny.

b) Oblicz pole trójkąta  $ABC$ .

Odp. b) 30

6.44. **8.65.** Dane są punkty  $A(-3, 2), B(5, 0), C(-2, 6)$ .

**D** a) Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest prostokątny.

b) Oblicz pole trójkąta  $ABC$ .

Odp. 17

6.45. **8.66.** Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach:

$3x - y - 9 = 0, 2x + y - 1 = 0, x + y - 3 = 0$ . Oblicz pole tego trójkąta.

Odp. 10

6.46. **8.67.** Oblicz pole trójkąta równobocznego  $ABC$  wiedząc, że punkt  $S$  jest środkiem

ciężkości tego trójkąta oraz  $\overrightarrow{AS} = [2\sqrt{2}, -4]$ .

6.47. **8.68.** Oblicz pole sześciokąta foremnego  $ABCDEF$  wiedząc, że  $\overrightarrow{AD} = [\sqrt{39}, 5]$ .

Odp.  $24\sqrt{3}$

6.48. **8.69.** Punkt  $S$  jest punktem przecięcia się przekątnych kwadratu  $ABCD$ . Wiedząc,

że  $\overrightarrow{AS} = \left[-12, 3\frac{1}{2}\right]$ , oblicz pole kwadratu  $ABCD$ .

Odp. 312,5

- 6.49. **8.70.** Oblicz pole prostokąta  $ABCD$  wiedząc, że  $A(-5, -7)$ ,  $B(4, 5)$ , a do prostej  $DC$  należy punkt  $E(-3, 4)$ .

\_\_\_\_\_  
Odp. 75

- 6.50. **8.71.** Oblicz pole równoległoboku  $ABCD$  wiedząc, że odległość punktu  $A$  od prostej  $DC$  jest równa 6 oraz  $\overrightarrow{DC} = [4, -3]$ .

\_\_\_\_\_  
Odp. 30

- 6.51. **8.72.** Oblicz pole równoległoboku  $ABCD$  wiedząc, że:

a)  $A(2, 4)$ ,  $B(6, 3)$ ,  $C(4, -1)$                       b)  $A(-2, 5)$ ,  $C(3, 0)$ ,  $D(7, 2)$ .

\_\_\_\_\_  
Odp. a) 18    b) 30

- 6.52. **8.73.** Dane są punkty  $A(-3, -2)$ ,  $B(6, 4)$ ,  $C(2, 5)$ ,  $D(-1, 3)$ .

**D** a) Wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest trapezem.

b) Oblicz pole tego trapezu.

\_\_\_\_\_  
Odp. b) 22

- 6.53. **8.74.** Punkty  $A(-2, -1)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(2, 7)$ ,  $D(-5, 8)$  są wierzchołkami czworokąta  $ABCD$ .

**D** a) Wykaż, że przekątne  $AC$  i  $BD$  są prostopadłe.

b) Oblicz pole czworokąta  $ABCD$ .

\_\_\_\_\_  
Odp. b) 50

- 6.54. **8.75.** Oblicz pole czworokąta  $ABCD$  wiedząc, że:

a)  $A(-5, 3)$ ,  $B(1, -3)$ ,  $C(4, 6)$ ,  $D(-3, 6)$

b)  $A(-4, 2)$ ,  $B(-4, -3)$ ,  $C(0, -4)$ ,  $D(6, 5)$

\_\_\_\_\_  
Odp. a) 46,5; *wskazówka:  $P = P_{DAC} + P_{ABC}$*     b) 46

- 6.55. **8.76.** Dane są punkty:  $A(0, 1)$ ,  $B(8, 4)$ . Wyznacz na osi  $OX$  taki punkt  $C$ , aby pole trójkąta  $ABC$  było równe 10.

\_\_\_\_\_  
Odp.  $C(4, 0)$  lub  $C\left(-9\frac{1}{3}, 0\right)$

- 6.56. **8.77.** Dane są punkty:  $A(1, 2)$ ,  $B(4, 6)$ . Wyznacz na osi  $OY$  taki punkt  $C$ , aby pole trójkąta  $ABC$  było równe 13.

\_\_\_\_\_  
Odp.  $C(0, -8)$  lub  $C\left(0, 9\frac{1}{3}\right)$