Równanie okręgu. Wzajemne położenie prostej i okręgu

6.57. **8.78.** Przekształć dane równanie okręgu do postaci kanonicznej. Podaj współrzędne środka i promień tego okręgu.

a) $x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 14x + 18y + 9 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 5x - 3y - 0{,}5 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 11x - y + 5{,}5 = 0$.

Odp. a) $(x + 4)^2 + y^2 = 1$; $S(-4, 0)$, $r = 1$ b) $(x - 7)^2 + (y + 9)^2 = 121$; $S(7, -9)$, $r = 11$

c) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$; $S\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $r=3$

d) $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=25$; $S\left(-\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $r=5$

6.58. **8.79.** Sprawdź, które z poniższych równań opisuje okrąg. Wyznacz środek i promień tego okręgu.

a) $x^2 + y^2 - 2xy = 0$ b) $x^2 + y^2 - 6y = 0$

c) $x^2 + y + 3x = 0$ d) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$

Odp. Równanie opisuje: a) prostą b) okrąg o środku $S(0, 3)$ i promieniu 3 c) parabolę d) punkt

6.59. **8.80.** Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S wiedząc, że punkt A należy do tego okręgu.

a) $A(3, 10)$, $S(-3, 2)$ b) $A(4, 7)$, $S(-2, 1)$

Odp. a) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 100$ b) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 72$

6.60. **8.81.** Dany jest punkt A oraz proste k i l. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt A wiedząc, że środek tego okręgu należy jednocześnie do prostej k i do prostej l.

a) $A(-2, 2)$, k: $y = -3x + 6$, l: $x - 1 = 0$

b) $A(8, -1)$, k: $y = -3x + 13$, l: $x - 2y - 2 = 0$

Odp. a) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ b) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 20$

6.61. **8.82.** Dany jest promień r okręgu oraz punkty A i B należące do tego okręgu. Wyznacz współrzędne środka tego okręgu.

a) $A(-3, 4)$, $B(5, 0)$, $r = 5$ b) $A(1, 3)$, $B(5, -1)$, $r=2\sqrt{2}$

Odp. a) $(0, 0)$ lub $(2, 4)$ b) $(3, 1)$

6.62. **8.83.** Dane są punkty A i B oraz prosta k. Wyznacz współrzędne środka S i promień r okręgu, przechodzącego przez punkty A, B wiedząc, że środek okręgu należy do prostej k.

a) $A(1, 4)$, $B(7, 0)$, k: $x + 2y = 0$ b) $A(0, -8)$, $B(4, 0)$, k: $2x - 3y + 5 = 0$

Odp. a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$ b) $S(-4, -1)$, $r = \sqrt{65}$

6.63. **8.84.** Oblicz, o ile istnieją, punkty wspólne okręgu o i prostej k, jeśli:

a) o: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 10$, k: $x - y + 7 = 0$
b) o: $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 18$, k: $2x - 2y - 1 = 0$
c) o: $x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$, k: $x + 2y + 6 = 0$
d) o: $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 17 = 0$, k: $x + 3y + 19 = 0$

Odp. a) $(-6, 1)$, $(-2, 5)$ b) nie istnieją c) $(2, -4)$ d) $(-4, -5)$, $\left(1\frac{2}{5}, -6\frac{4}{5}\right)$

6.64. **8.85.** Określ położenie prostej k względem okręgu o, jeśli:

a) k: $x + y - 4 = 0$, o: $x^2 + y^2 = 8$
b) k: $x - 2y - 1 = 0$, o: $(x-1)^2 + y^2 = 4$
c) k: $y - 3x + 5 = 0$, o: $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$
d) k: $x - 4y - 4 = 0$, o: $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

Odp. a) styczna do okręgu b) sieczna okręgu c) prosta rozłączna z okręgiem
d) sieczna okręgu

6.65. **8.86.** Wyznacz równanie okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych i przechodzącego przez dany punkt A.

a) $A(3, 0)$ b) $A(8, 1)$ c) $A(-4, 2)$ d) $C(-9, -8)$

Odp. a) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ lub $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$
b) $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ lub $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$
c) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ lub $(x+10)^2 + (y-10)^2 = 100$
d) $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$ lub $(x+29)^2 + (y+29)^2 = 841$

6.66. **8.87.** Wyznacz równanie okręgu:

a) stycznego do prostych k: $y = 2x + 4$ oraz l: $y = 2x - 6$ wiedząc, że środek tego okręgu należy do osi OX
b) stycznego do prostych k: $4x + 3y = 0$ oraz l: $4x + 3y + 8 = 0$ wiedząc, że środek tego okręgu należy do osi OY.

Odp. a) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 5$ b) $x^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = 0{,}64$

6.67. **8.88.** Dany jest okrąg $o: x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$. Wyznacz równanie ogólne prostej k, która jest styczna do tego okręgu w punkcie:

a) $A(9, 1)$ b) $B(4, -4)$ c) $C(0, 4)$ d) $D(7, 5)$

Odp. a) $k: x - 9 = 0$ b) $k: y + 4 = 0$ c) $k: 4x - 3y + 12 = 0$ d) $k: 3x + 4y - 41 = 0$

6.68. **8.89.** Napisz równanie kierunkowe stycznych do danego okręgu o i równoległych do prostej k, jeśli:

a) $o: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ $k: y = 2x$

b) $o: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 16$ $k: y = x$

c) $o: x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ $k: y = -3x$

d) $o: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ $k: y = -x$

Odp. a) $y = 2x - 3 + 2\sqrt{5}$ lub $y = 2x - 3 - 2\sqrt{5}$ b) $y = x + 8 + 4\sqrt{2}$ lub $y = x + 8 - 4\sqrt{2}$

c) $y = -3x + 3 + 4\sqrt{10}$ lub $y = -3x + 3 - 4\sqrt{10}$

d) $y = -x + 7 + 3\sqrt{2}$ lub $y = -x + 7 - 3\sqrt{2}$

6.69. **8.90.** Napisz równania kierunkowe stycznych do danego okręgu o i prostopadłych do prostej k, jeśli:

a) $o: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$ $k: y = x$

b) $o: (x-5)^2 + y^2 = 9$ $k: y = -x$

c) $o: x^2 + y^2 - 2x + 12y + 28 = 0$ $k: y = -0{,}5x$

d) $o: x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0$ $k: y = -0{,}75x$

Odp. a) $y = -x + 1 - \sqrt{2}$ lub $y = -x + 1 + \sqrt{2}$ b) $y = x - 5 + 3\sqrt{2}$ lub $y = x - 5 - 3\sqrt{2}$

c) $y = 2x - 8 + 3\sqrt{5}$ lub $y = 2x - 8 - 3\sqrt{5}$ d) $y = \frac{4}{3}x - 1$ lub $y = \frac{4}{3}x - 17\frac{2}{3}$

6.70. **8.91.** Napisz równania kierunkowe stycznych do danego okręgu o i nachylonych do osi OX pod kątem α, jeśli:

a) $x^2 + y^2 = 1$; $\alpha = 60°$ b) $(x-1)^2 + y^2 = 4$; $\alpha = 120°$

c) $x^2 + y^2 - 10x = 0$; $\alpha = 150°$ d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$; $\alpha = 135°$

Odp. a) $y = \sqrt{3}x + 2$ lub $y = \sqrt{3}x - 2$ b) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 4$ lub $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 4$

c) $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x - \frac{5\sqrt{3}}{3}$ lub $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x + 5\sqrt{3}$ d) $y = -x + 3$ lub $y = -x - 5$

8.92. Napisz równania ogólne stycznych do danego okręgu o i przechodzących przez punkt A, jeśli:

a) $o: x^2 + y^2 = 4$, $A(6, -2)$ b) $o: x^2 + y^2 = 9$, $A(-5, 3)$

c) $o\colon x^2+y^2-6x-4y+3=0$, $A(-4, 3)$ d) $o\colon x^2+y^2+6x+2y+5=0$, $A(-2, 2)$
e) $o\colon x^2+y^2+10x-6y+30=0$, $A(-7, 9)$ f) $o\colon x^2+y^2-6x+8y+21=0$, $A(5, -1)$

Odp. a) $y+2=0$ lub $3x+4y-10=0$ b) $y-3=0$ lub $15x+8y+51=0$
c) $9x+13y-3=0$ lub $x-3y+13=0$ d) $2x+y+2=0$ lub $x-2y+6=0$
e) $x+7=0$ lub $4x+3y+1=0$ f) $x-5=0$ lub $5x-12y-37=0$

8.93. Sieczna $k\colon x-y+1=0$ przecina okrąg $o\colon x^2+y^2-6x-2y+1=0$ w punktach A i B. Przez punkty A i B poprowadzono styczne do okręgu, które przecinają się w punkcie C. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Odp. $\left(x-1\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-2\frac{1}{2}\right)^2=4\frac{1}{2}$

8.94. Oblicz tangens kąta ostrego, jaki tworzą styczne do okręgu $o\colon x^2+y^2-8x-6y+21=0$, przechodzące przez punkt $P(2, -1)$.

Odp. $\operatorname{tg}\alpha=1\frac{1}{3}$

8.95. Zbadaj liczbę punktów wspólnych okręgu o z prostą l, w zależności od wartości parametru m $(m\in\boldsymbol{R})$, jeśli:
a) $o\colon (x+2)^2+(y+4)^2=2$; $l\colon y=-x+m$
b) $o\colon (x-3)^2+(y-2)^2=8$; $l\colon y=x+m$
c) $o\colon (x-1)^2+(y-1)^2=m$; $l\colon x+y-1=0$
d) $o\colon x^2+y^2=25$; $l\colon 4x+3y-m=0$

Odp. a) 0 punktów wspólnych dla $m\in(-\infty, -8)\cup(-4, +\infty)$
1 punkt wspólny dla $m\in\{-8, -4\}$
2 punkty wspólne dla $m\in(-8, -4)$
b) 0 punktów wspólnych dla $m\in(-\infty, -5)\cup(3, +\infty)$
1 punkt wspólny dla $m\in\{-5, 3\}$
2 punkty wspólne dla $m\in(-5, 3)$
c) dla $m\in(-\infty, 0\rangle$ równanie $(x-1)^2+(y-1)^2=m$ nie opisuje okręgu
0 punktów wspólnych dla $m\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$
1 punkt wspólny dla $m=\frac{1}{2}$
2 punkty wspólne dla $m\in\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
d) 0 punktów wspólnych dla $m\in(-\infty, -25)\cup(25, +\infty)$
1 punkt wspólny dla $m\in\{-25, 25\}$
2 punkty wspólne dla $m\in(-25, 25)$

8.96. Wyznacz współrzędne środka okręgu stycznego do prostej k: $\sqrt{3}x - y - 2 - 2\sqrt{3} = 0$ i jednocześnie stycznego do dodatnich półosi układu współrzędnych.

Odp. $S(2, 2)$

8.97. Okrąg przechodzi przez punkt $A(4, 1)$, zaś jego środek należy do prostej k: $x - y = 0$. Wiedząc, że okrąg ten jest styczny do prostej l: $y - 5 = 0$, wyznacz jego równanie.

Odp. $\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 = \left(5 + 2\sqrt{2}\right)^2$ lub $\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 2\sqrt{2}\right)^2 = \left(5 - 2\sqrt{2}\right)^2$

8.98. Wyznacz równanie okręgu o promieniu 5, który jest styczny do osi OY i jednocześnie styczny do prostej k: $3x + 4y - 6 = 0$.

Odp. $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$ lub $(x - 5)^2 + \left(y + 8\frac{1}{2}\right)^2 = 25$ lub $(x + 5)^2 + \left(y - 11\frac{1}{2}\right)^2 = 25$ lub $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 25$

Wzajemne położenie dwóch okręgów

8.99. Określ wzajemne położenie okręgów o_1 i o_2, jeśli:

a) o_1: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$, o_2: $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 12$
b) o_1: $(x + 3)^2 + y^2 = 10$, o_2: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 40$
c) o_1: $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$, o_2: $x^2 + y^2 + 4y = 0$
d) o_1: $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$ o_2: $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$
e) o_1: $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$, o_2: $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$
f) o_1: $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$, o_2: $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 5$

Odp. a) okręgi się przecinają b) okręgi są styczne wewnętrznie c) okręgi są styczne zewnętrznie d) okręgi są rozłączne wewnętrznie e) okręgi są rozłączne zewnętrznie f) okręgi są współśrodkowe

8.100. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów o_1 i o_2 (o ile istnieją).

a) o_1: $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$, o_2: $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 24 = 0$
b) o_1: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$, o_2: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$

Odp. a) $(7, -3)$ b) $(-2, 2)$ oraz $(-1, 3)$

8.101. Wyznacz wartości parametru m, dla których okręgi o_1: $(x+4)^2+(y+1)^2=5$ oraz o_2: $(x+1)^2+(y-m)^2=20$ są styczne zewnętrznie.

Odp. $m \in \{-7, 5\}$

8.102. Wyznacz wartości parametru m, dla których okręgi o_1: $x^2+(y+4)^2=m^2$ oraz o_2: $(x-3)^2+y^2=49$ są styczne wewnętrznie.

Odp. $m \in \{-12, -2, 2, 12\}$

8.103. Wyznacz wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których okręgi o_1: $(x-2)^2+(y+4)^2=20$ oraz o_2: $(x-m)^2+(y+2m)^2=5$ mają tylko jeden punkt wspólny.

Odp. $m \in \{-1, 1, 3, 5\}$. Jeśli $m \in \{-1, 5\}$, to okręgi są styczne zewnętrznie; jeśli $m \in \{1, 3\}$, to okręgi są styczne wewnętrznie.

8.104. Wyznacz wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których okręgi o_1: $(x-3)^2+(y-m)^2=1$ oraz o_2: $(x+m)^2+(y-1)^2=9$ mają tylko jeden punkt wspólny.

Odp. Okręgi są styczne zewnętrznie, jeśli $m \in \{-3, 1\}$. Nie istnieje parametr m, dla którego okręgi o_1 i o_2 byłyby styczne wewnętrznie.

8.105. Dla jakich wartości parametru m $(m \in \boldsymbol{R})$ okręgi opisane równaniami: o_1: $(x+5)^2+(y+m)^2=16$ oraz o_2: $(x-2m)^2+(y+m)^2=9$ przecinają się w dwóch punktach?

Odp. dla $m \in (-6, -3) \cup (-2, 1)$

8.106. Wyznacz wartości parametru m, dla których okręgi o_1: $x^2+(y-6)^2=m$ oraz $(x+8)^2+y^2=9$ są rozłączne zewnętrznie.

Odp. $m \in (0, 49)$

8.107. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, okręgi opisane równaniami: o_1: $(x-m)^2+(y-2m)^2=1$ oraz o_2: $(x-2)^2+(y+1)^2=16$ są wzajemnie zewnętrzne?

Odp. $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

8.108. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, okręgi opisane równaniami: o_1: $(x-m)^2+(y+1)^2=1$ oraz o_2: $(x+2)^2+(y-m+3)^2=25$ są rozłączne wewnętrznie?

Odp. dla $m \in (-2, 2)$