

Zadania różne z geometrii analitycznej

- 6.71. **8.109.** Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-3, 2)$, $B(7, -4)$, $C(9, 2)$, $D(-1, 8)$,
 \mathcal{D} to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Odp. *wskazówka:* I sposób: Sprawdź, czy odpowiednie wektory są równe. II sposób: Sprawdź, czy środek przekątnej AC jest jednocześnie środkiem przekątnej BD .

- 6.72. **8.110.** Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-5, -4)$, $B(2, 0)$, $C(1, 8)$, $D(-6, 4)$,
 \mathcal{D} to czworokąt $ABCD$ jest rombem.

Odp. *wskazówka:* I sposób: Wykaż, że długości wszystkich boków czworokąta są jednakowe. II sposób: Wykaż, że czworokąt jest równoległobokiem, którego przekątne są do siebie prostopadłe.

- 6.73. **8.111.** Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-5, -2)$, $B(-1, -4)$, $C(3, 4)$, $D(-1, 6)$,
 \mathcal{D} to czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

Odp. *wskazówka:* I sposób: Wykaż, że przekątne AC i BD mają jednakową długość i dzielą się na połowy. II sposób: Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, którego co najmniej jeden kąt wewnętrzny jest prosty.

- 6.74. **8.112.** Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-4, -2)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 5)$, $D(-6, 3)$, to
 \mathcal{D} czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

Odp. *wskazówka:* I sposób: Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest rombem, którego co najmniej jeden kąt wewnętrzny jest prosty. II sposób: Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, którego sąsiednie boki mają jednakową długość.

- 6.75. **8.113.** Dane są punkty $A(1, -4)$, $B(11, 1)$, $C(2, 4)$, $D(-2, 2)$.

\mathcal{D} a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym.

b) Oblicz obwód i pole tego trapezu.

Odp. b) $Obw = 10\sqrt{5} + 3\sqrt{10}$, $P = 52,5$

- 6.76. **8.114.** Dane są punkty: $A(-1, 0)$, $B(5, 2)$, $C(2, 6)$, $D(-3, 6)$.

\mathcal{D} a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest deltoidem.

b) Oblicz obwód i pole tego deltoidu.

Odp. a) *wskazówka:* Wykaż, że $|AB| = |AD|$ oraz $|DC| = |BC|$. b) $Obw = 10 + 4\sqrt{10}$, $P = 30$

- 6.77. **8.115.** Dane są punkty: $A(-4, -1)$, $B(2, -3)$, $C(5, 6)$.

\mathcal{D} a) Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

b) Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\text{Odp. b) } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$$

6.78. **8.116.** Dane są punkty: $C(0, 5)$ oraz $D(3, -4)$. Wiedząc, że odcinek CD jest wysokością trójkąta równobocznego ABC , wyznacz:

a) równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC

b) równanie okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

$$\text{Odp. a) } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 40 \quad \text{b) } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

6.79. **8.117.** Okrąg o jest styczny do osi OX w punkcie $A(4, 0)$ i jednocześnie jest styczny do ujemnej półosi OY .

a) Napisz równanie okręgu o .

b) Wyznacz na okręgu punkty B i C tak, aby trójkąt ABC był równoboczny.

$$\text{Odp. a) } (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16 \quad \text{b) } B(4 - 2\sqrt{3}, -6), C(4 + 2\sqrt{3}, -6)$$

6.80. **8.118.** Dane są wierzchołki $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ rombu $ABCD$. Wiedząc, że kąt BAD rombu jest równy 30° , oblicz współrzędne wierzchołków C i D .

$$\text{Odp. } C(3\sqrt{3} + 6, 3), D(3\sqrt{3}, 3) \text{ lub } C(3\sqrt{3} + 6, -3), D(3\sqrt{3}, -3)$$

6.81. **8.119.** Dane są wierzchołki $A(-1, -4)$, $B(7, 2)$ równoległoboku $ABCD$. Wiedząc, że pole równoległoboku jest równe 50, wyznacz równanie ogólne prostej, zawierającej bok CD .

$$\text{Odp. } 3x - 4y + 12 = 0 \text{ lub } 3x - 4y - 38 = 0$$

6.82. **8.120.** Dane są punkty $A(-6, -3)$, $B(3, 0)$. Wyznacz punkt C , leżący na prostej $k: y = 4$ tak, aby pole trójkąta ABC było równe 30.

$$\text{Odp. } C(-5, 4) \text{ lub } C(35, 4)$$

6.83. **8.121.** Dane są wierzchołki $A(0, 1)$ i $C(6, 5)$ kwadratu $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D .

$$\text{Odp. } B(5, 0), D(1, 6)$$

6.84. **8.122.** Punkty $A(-5, -4)$, $B(3, -2)$ są wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D .

$$\text{Odp. } C_1(1, 6), D_1(-7, 4) \text{ lub } C_2(5, -10), D_2(-3, -12)$$

- 6.85. **8.123.** Punkty przecięcia paraboli $y = x^2 - 2x - 8$ z prostą $k: 2x + y - 1 = 0$ są końcami przekątnej rombu, którego pole jest równe 60. Oblicz współrzędne wierzchołków tego rombu.

 Odp. $(-3, 7), (-4, -1), (3, -5), D(4, 3)$

- 6.86. **8.124.** Dana jest prosta $k: y = 2x + 7$ oraz punkt $C(-5, 2)$.

- a) Wyznacz na prostej k punkty A i B leżące w odległości 5 od punktu C .
 b) Oblicz pole trójkąta ABC .
 c) Oblicz cosinus kąta ACB .

 Odp. a) $A(-5, -3), B(-1, 5)$ b) $P = 10$ c) $-\frac{3}{5}$

- 6.87. **8.125.** Dane są punkty $A(-2, 5), B(4, 3)$. Wyznacz na prostej $k: x + 2y - 4 = 0$ punkt C tak, aby kąt BCA był równy 90° .

 Odp. $C(-2, 3)$ lub $C(2, 1)$

- 6.88. **8.126.** Punkt W jest wierzchołkiem paraboli opisanej równaniem: $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2$.

Na ramionach paraboli wyznacz punkty A i B tak, aby kąt AWB był prosty, a trójkąt AWB był trójkątem równoramiennym.

 Odp. $A(1, 3), B(7, 3)$

- 8.127.** Wyznacz równania prostych, w których zawierają się dwusieczne kątów, pod jakimi przecinają się proste $k: 4x + 2y + 1 = 0$ i $m: 11x - 2y + 7 = 0$.

 Odp. $2x - 14y + 9 = 0, 42x + 6y + 19 = 0$

- 8.128.** Wyznacz równanie prostej, zawierającej dwusieczną tego kąta, utworzonego przez proste $k: x + 3y - 1 = 0$ oraz $m: 6x - 2y + 1 = 0$, do obszaru którego należy punkt $P(3, 1)$.

 Odp. $4x - 8y + 3 = 0$

- 8.129.** Dane są dwa punkty $A(1, -1)$ i $B(3, 3)$. Wyznacz na prostej $k: x - y + 3 = 0$ taki punkt C , aby pole trójkąta ABC było równe 6.

 Odp. $C(0, 3)$ lub $(12, 15)$

D 8.130. Pary liczb (x, y) spełniające układ równań $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 \\ x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0 \end{cases}$ są współ-

rzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego $ABCD$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.

Odp. $A(-2, -2), B(6, -2), C(4, 4), D(0, 4)$

8.131. Krzywa l jest zbiorem punktów, których odległość od osi OX jest taka sama, jak odległość od punktu $P(0, -2)$.

a) Wyznacz równanie krzywej l .

b) Oblicz współrzędne punktów, które znajdują się w odległości 5 od punktu P i od osi OX .

Odp. a) Krzywa jest parabolą o równaniu $y = -\frac{1}{4}x^2 - 1$. b) $(-4, -5)$ lub $(4, -5)$

8.132. Krzywa l jest zbiorem punktów, których odległość od prostej $k: y + 1 = 0$ jest taka sama, jak odległość od punktu $(0, 1)$.

a) Wyznacz równanie krzywej l .

b) Podaj współrzędne punktu P , którego odległość od prostej k i od punktu $(0, 1)$ jest równa 10.

Odp. a) Krzywa jest parabolą o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2$. b) $P(6, 9)$ lub $P(-6, 9)$

8.133. Dane są punkty $A(3, 0), B(7, 0)$. Wyznacz równanie krzywej, składającej się z wszystkich punktów, których odległość w układzie współrzędnych od punktu B jest trzy razy większa niż odległość od punktu A .

Odp. Okrąg o środku w punkcie $S\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ i promieniu równym $\frac{3}{2}$

8.134. Dane są punkty $A(-17, 0), B(-2, 0)$. Wyznacz równanie krzywej składającej się z wszystkich punktów, których odległość w układzie współrzędnych od punktu A jest cztery razy większa niż odległość od punktu B .

Odp. Krzywa jest okręgiem o równaniu $(x + 1)^2 + y^2 = 16$.

8.135. Wyznacz równanie krzywej, będącej zbiorem środków wszystkich okręgów stycznych jednocześnie do osi OX oraz do okręgu o środku w punkcie $S(0, 3)$ i promieniu 1.

Odp. Krzywa jest parabolą o równaniu $y = \frac{1}{8}x^2 + 1$.