Odległość punktu od prostej

Prezentacja ma dwie części.

Prezentacja ma dwie części. W pierwszej części przedstawimy wzór na odległość punktu od prostej i odległość między dwiema prostymi równoległymi.

Prezentacja ma dwie części. W pierwszej części przedstawimy wzór na odległość punktu od prostej i odległość między dwiema prostymi równoległymi. W drugiej przećwiczymy stosowanie tych wzorów i rozwiążemy wybrane zadania ze zbioru.

CZĘŚĆ PIERWSZA

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Zapiszemy ją jako $d(A, l)$.

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Zapiszemy ją jako $d(A, l)$. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Zapiszemy ją jako $d(A, l)$. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Zapiszemy ją jako $d(A, l)$. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

- znajdujemy prostą m, prostopadłą do l i przechodzącą przez A,

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Zapiszemy ją jako $d(A, l)$. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

- znajdujemy prostą m, prostopadłą do l i przechodzącą przez A,
- znajdujemy B - punkt przecięcia prostych l i m,

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Zapiszemy ją jako $d(A, l)$. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

- znajdujemy prostą m, prostopadłą do l i przechodzącą przez A,
- znajdujemy B - punkt przecięcia prostych l i m,
- obliczamy odległość punktu A od punktu B (ze wzoru albo np. licząc długość $\overrightarrow{AB}$).

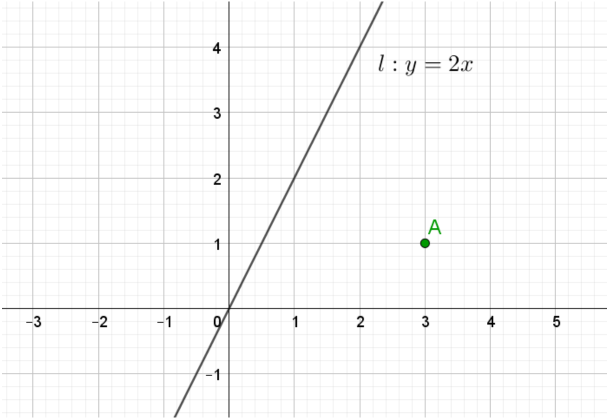
Przykład 1

Obliczymy odległość punktu $A(3, 1)$ od prostej $y = 2x$.

Przykład 1

Obliczymy odległość punktu $A(3, 1)$ od prostej $y = 2x$.

Rysunek:



Przykład 1

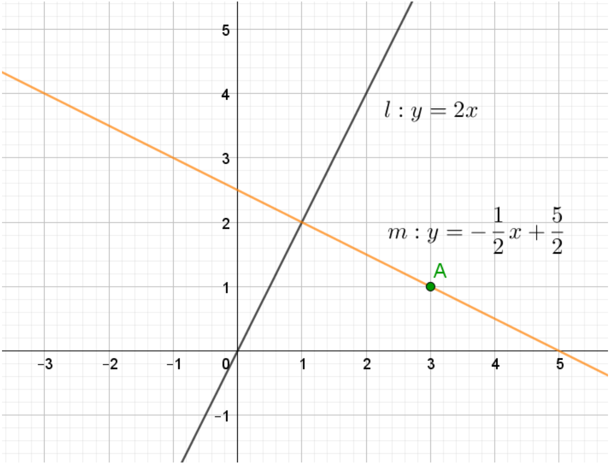
Obliczamy prostą m prostopadłą do l i przechodzącą przez A.

Przykład 1

Obliczamy prostą m prostopadłą do l i przechodzącą przez A.
Otrzymujemy $m : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Przykład 1

Obliczamy prostą m prostopadłą do l i przechodzącą przez A.
Otrzymujemy $m : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$



Przykład 1

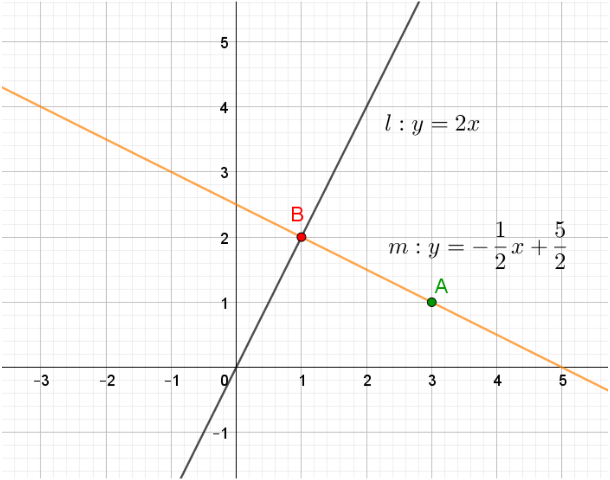
Obliczamy punkt B - punkt przecięcia prostych l i m.

Przykład 1

Obliczamy punkt B - punkt przecięcia prostych l i m. Otrzymujemy $B(1, 2)$

Przykład 1

Obliczamy punkt B - punkt przecięcia prostych l i m. Otrzymujemy $B(1, 2)$



Przykład 1

Odległość od A do l jest równa odległości od A do B, czyli:

$$d(A, l) = d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |[-2, 1]| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

W przypadku obliczania odległości punktu od prostej będziemy woleli pracować z prostą w postaci ogólnej. Zróbmy więc jeszcze ręcznie jeden przykład z prostą w tej postaci.

Przykład 2

Obliczmy odległość $A(-1, 2)$ od $k : 3x - y - 5 = 0$.

Przykład 2

Obliczmy odległość $A(-1,2)$ od $k: 3x - y - 5 = 0$.

Prosta prostopadła do k przechodząca przez A ma wzór $x + 3y - 5 = 0$.

Przykład 2

Obliczmy odległość $A(-1, 2)$ od $k : 3x - y - 5 = 0$.

Prosta prostopadła do k przechodząca przez A ma wzór $x + 3y - 5 = 0$.

Rozwiązujemy układ:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

i otrzymujemy punkt $B(2, 1)$.

Przykład 2

Obliczmy odległość $A(-1,2)$ od $k: 3x - y - 5 = 0$.

Prosta prostopadła do k przechodząca przez A ma wzór $x + 3y - 5 = 0$.

Rozwiązujemy układ:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

i otrzymujemy punkt $B(2,1)$.

Otrzymujemy ostatecznie:

$$d(A,k) = d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \|[3,-1]\| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

Wzór

Spróbujmy teraz wyprowadzić wzór na odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $k : Ax + By + C = 0$.

Wzór

Spróbujmy teraz wyprowadzić wzór na odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $k : Ax + By + C = 0$.

Byłoby idealnie, gdybyście kolejne kroki wykonywali samodzielnie.

Wzór

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $k : Ax + By + C = 0$.

Wzór

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $k : Ax + By + C = 0$.

Krok 1. Prosta prostopadła do k przechodząca przez P:

Wzór

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $k : Ax + By + C = 0$.

Krok 1. Prosta prostopadła do k przechodząca przez P:

Wektor prostopadły to $[B, -A]$, musimy jeszcze obliczyć współczynnik C tak, by punkt P leżał na tej prostej.

Wzór

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $k : Ax + By + C = 0$.

Krok 1. Prosta prostopadła do k przechodząca przez P:

Wektor prostopadły to $[B, -A]$, musimy jeszcze obliczyć współczynnik C tak, by punkt P leżał na tej prostej. Otrzymujemy:

$$Bx - Ay - Bx_0 + Ay_0 = 0$$

Wzór

Krok 2. Punkt przecięcia prostych.

Wzór

Krok 2. Punkt przecięcia prostych. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay - Bx_0 + Ay_0 = 0 \end{cases}$$

Wzór

Krok 2. Punkt przecięcia prostych. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay - Bx_0 + Ay_0 = 0 \end{cases}$$

Pamiętajmy, że naszymi niewiadomymi są x i y, pozostałe współczynniki to stałe.

Wzór

Krok 2. Punkt przecięcia prostych. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay - Bx_0 + Ay_0 = 0 \end{cases}$$

Pamiętajmy, że naszymi niewiadomymi są x i y, pozostałe współczynniki to stałe. Zapiszmy ten układ następująco:

$$\begin{cases} Ax + By = -C \\ -Bx + Ay = Ay_0 - Bx_0 \end{cases}$$

Wzór

Krok 2. Punkt przecięcia prostych. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay - Bx_0 + Ay_0 = 0 \end{cases}$$

Pamiętajmy, że naszymi niewiadomymi są x i y, pozostałe współczynniki to stałe. Zapiszmy ten układ następująco:

$$\begin{cases} Ax + By = -C \\ -Bx + Ay = Ay_0 - Bx_0 \end{cases}$$

Taki układ dosyć sprawnie możemy rozwiązać wyznacznikami.

Wzór

Krok 2. Punkt przecięcia prostych. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay - Bx_0 + Ay_0 = 0 \end{cases}$$

Pamiętajmy, że naszymi niewiadomymi są x i y, pozostałe współczynniki to stałe. Zapiszmy ten układ następująco:

$$\begin{cases} Ax + By = -C \\ -Bx + Ay = Ay_0 - Bx_0 \end{cases}$$

Taki układ dosyć sprawnie możemy rozwiązać wyznacznikami. Mamy:

$$W = A^2 + B^2 \qquad W_x = -AC - ABy_0 + B^2x_0 \qquad W_y = A^2y_0 - ABx_0 - BC$$

Wzór

Czyli punkt przecięcia (nazwijmy go S) prostej k z prostą przechodzącą przez P i prostopadłą do k ma współrzędne

$$\left(\frac{-AC - ABy_0 + B^2x_0}{A^2+B^2}, \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2+B^2}\right)$$

Wzór

Krok 3. Odległość od P do k to odległość od P do S. Znajdźmy więc $\overrightarrow{PS}$:

Wzór

Krok 3. Odległość od P do k to odległość od P do S. Znajdźmy więc $\overrightarrow{PS}$:

$$\overrightarrow{PS} = \left[\frac{-AC - ABy_0 + B^2x_0}{A^2 + B^2} - x_0, \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0\right]$$

Wzór

Krok 3. Odległość od P do k to odległość od P do S. Znajdźmy więc $\overrightarrow{PS}$:

$$\overrightarrow{PS} = \left[\frac{-AC - ABy_0 + B^2x_0}{A^2 + B^2} - x_0, \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0\right]$$

Po uproszczeniu:

Wzór

Krok 3. Odległość od P do k to odległość od P do S. Znajdźmy więc $\overrightarrow{PS}$:

$$\overrightarrow{PS} = \left[\frac{-AC - ABy_0 + B^2x_0}{A^2 + B^2} - x_0, \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0\right]$$

Po uproszczeniu:

$$\overrightarrow{PS} = \left[\frac{-AC - ABy_0 - A^2x_0}{A^2 + B^2}, \frac{-B^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}\right]$$

Wzór

Krok 3. Odległość od P do k to odległość od P do S. Znajdźmy więc $\overrightarrow{PS}$:

$$\overrightarrow{PS} = \left[\frac{-AC - ABy_0 + B^2x_0}{A^2 + B^2} - x_0, \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0\right]$$

Po uproszczeniu:

$$\overrightarrow{PS} = \left[\frac{-AC - ABy_0 - A^2x_0}{A^2 + B^2}, \frac{-B^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}\right]$$

Teraz już tylko trzeba policzyć długość tego wektora:

$$|\overrightarrow{PS}| = \sqrt{\left(\frac{-AC - ABy_0 - A^2x_0}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{-B^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

Wzór

$$|\overrightarrow{PS}| = \sqrt{\left(\frac{-AC - ABy_0 - A^2x_0}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{-B^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

Wzór

$$|\overrightarrow{PS}| = \sqrt{\left(\frac{-AC - ABy_0 - A^2x_0}{A^2+B^2}\right)^2 + \left(\frac{-B^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2+B^2}\right)^2}$$

To wygląda fatalnie, ale w dosyć magiczny sposób upraszcza się do:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Wzór

$$|\overrightarrow{PS}| = \sqrt{\left(\frac{-AC - ABy_0 - A^2x_0}{A^2+B^2}\right)^2 + \left(\frac{-B^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2+B^2}\right)^2}$$

To wygląda fatalnie, ale w dosyć magiczny sposób upraszcza się do:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Nie żartuję, proszę wziąć kartkę i spróbować to policzyć!

Wzór

$$|\overrightarrow{PS}| = \sqrt{\left(\frac{-AC - ABy_0 - A^2x_0}{A^2+B^2}\right)^2 + \left(\frac{-B^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2+B^2}\right)^2}$$

To wygląda fatalnie, ale w dosyć magiczny sposób upraszcza się do:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Nie żartuję, proszę wziąć kartkę i spróbować to policzyć! Warto zacząć od wyciągnięcia A z pierwszego licznika i B z drugiego. Dalej już z górki.

Wzór

Otrzymaliśmy wzór na odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $k : Ax + By + C = 0$.

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Przykład 2

Wróćmy do przykładu 2. Odległość $A(-1,2)$ od $k : 3x - y - 5 = 0$:

Przykład 2

Wróćmy do przykładu 2. Odległość $A(-1, 2)$ od $k : 3x - y - 5 = 0$:

$$d(A, k) = \frac{|3(-1) - 2 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Dwie proste

Obliczanie odległości między dwiema prostymi jest dosyć analogiczne.

Dwie proste

Obliczanie odległości między dwiema prostymi jest dosyć analogiczne. Po pierwsze jeśli dwie proste l i k nie są równoległe, to znaczy, że się przetną, czyli odległość między nimi będzie wynosić 0.

Dwie proste

Obliczanie odległości między dwiema prostymi jest dosyć analogiczne. Po pierwsze jeśli dwie proste l i k nie są równoległe, to znaczy, że się przetną, czyli odległość między nimi będzie wynosić 0.

Jeśli natomiast proste są równoległe, to wystarczy wybrać dowolny punkt na jednej z nich i obliczyć odległość tego punktu od drugiej prostej.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $l : 2x + 7y - 3 = 0$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $l : 2x + 7y - 3 = 0$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$.

Zauważmy najpierw, że są one równoległe.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $l : 2x + 7y - 3 = 0$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$.

Zauważmy najpierw, że są one równoległe. Teraz wybieramy dowolny punkt na prostej l, np. $(-2, 1)$ i teraz obliczamy odległość punktu $P(-2, 1)$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$:

Przykład

Obliczymy odległość prostej $l : 2x + 7y - 3 = 0$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$.

Zauważmy najpierw, że są one równoległe. Teraz wybieramy dowolny punkt na prostej l, np. $(-2, 1)$ i teraz obliczamy odległość punktu $P(-2, 1)$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$:

$$d(l, k) = d(P, k) = \frac{|2 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{2^2 + 7^2}} = \frac{7}{\sqrt{53}} = \frac{7\sqrt{53}}{53}$$

Wzór

Znów gdybyśmy obliczyli odległość dwóch prostych w postaci ogólnej bez konkretnych liczb tylko na wzorach to otrzymalibyśmy przyjemny wzór:

Odległość dwóch porstych równoległych

Jeśli $k : Ax + By + C_1 = 0$ i $l : Ax + By + C_2 = 0$ to mamy:

$$d(k, l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Wzór

Znów gdybyśmy obliczyli odległość dwóch prostych w postaci ogólnej bez konkretnych liczb tylko na wzorach to otrzymalibyśmy przyjemny wzór:

Odległość dwóch porstych równoległych

Jeśli $k : Ax + By + C_1 = 0$ i $l : Ax + By + C_2 = 0$ to mamy:

$$d(k, l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Uwaga, by zastosować ten wzór obie proste muszą mieć te same współczynniki A i B!

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe:

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k: 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l: 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$$

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$$

Ok, są równoległe.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$$

Ok, są równoległe.

Chcielibyśmy skorzystać ze wzoru, ale zanim to zrobimy musimy wykonać jeszcze jeden krok - zapisać obie proste w odpowiedniej postaci.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$$

Ok, są równoległe.

Chcielibyśmy skorzystać ze wzoru, ale zanim to zrobimy musimy wykonać jeszcze jeden krok - zapisać obie proste w odpowiedniej postaci. Mamy postać ogólną, ale odowiednie współczynniki nie są równe.

$$k : 2x - y + 2 = 0$$

$$l : 6x - 3y + 1 = 0$$

Przykład

Pomnożymy obie strony równania prostej k przez 3 i otrzymujemy:

$$k : 6x - 3y + 6 = 0$$
$$l : 6x - 3y + 1 = 0$$

Przykład

Pomnożymy obie strony równania prostej k przez 3 i otrzymujemy:

$$k : 6x - 3y + 6 = 0$$
$$l : 6x - 3y + 1 = 0$$

Teraz mamy $A = 6, B = -3, C_1 = 6, C_2 = 1$.

Przykład

Pomnożymy obie strony równania prostej k przez 3 i otrzymujemy:

$$k : 6x - 3y + 6 = 0$$
$$l : 6x - 3y + 1 = 0$$

Teraz mamy $A = 6, B = -3, C_1 = 6, C_2 = 1$. Korzystamy ze wzoru:

$$d(k, l) = \frac{|6 - 1|}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{45}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Podsumowanie

Mając punkt $P(x_0, y_0)$ oraz prostą w postaci ogólnej $k : Ax + By + C = 0$ odległość punktu P od prostej k dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Podsumowanie

Mając punkt $P(x_0, y_0)$ oraz prostą w postaci ogólnej $k : Ax + By + C = 0$ odległość punktu P od prostej k dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Mając dane dwie proste równoległe w postaci ogólnej $k : Ax + By + C_1 = 0$ i $l : Ax + By + C_2 = 0$ odległość między tymi prostymi dana jest wzorem:

$$d(k, l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Podsumowanie

Mając punkt $P(x_0, y_0)$ oraz prostą w postaci ogólnej $k: Ax + By + C = 0$ odległość punktu P od prostej k dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Mając dane dwie proste równoległe w postaci ogólnej $k: Ax + By + C_1 = 0$ i $l: Ax + By + C_2 = 0$ odległość między tymi prostymi dana jest wzorem:

$$d(k, l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Pamiętajmy, że w ostatnim wzorze musimy najpierw tak zapisać wzory, by współczynniki A i B zgadzały się w obu prostych.

Pierwszy wzór jest w kartach wzorów, drugiego tam nie ma!

CZĘŚĆ DRUGA

Ćwiczenia - odległość punktu od prostej

Oblicz odległość punktu P od prostej k:

Ćwiczenia - odległość punktu od prostej

Oblicz odległość punktu P od prostej k:

$P(0,3) \quad k: 3x - 4y + 2 = 0$

Ćwiczenia - odległość punktu od prostej

Oblicz odległość punktu P od prostej k:

$P(0,3) \quad k: 3x - 4y + 2 = 0$

$$d(P,k) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Ćwiczenia - odległość punktu od prostej

Oblicz odległość punktu P od prostej k:

$P(0,3) \quad k: 3x - 4y + 2 = 0$

$$d(P,k) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$P(-2,-3) \quad k: x - y + 1 = 0$

Ćwiczenia - odległość punktu od prostej

Oblicz odległość punktu P od prostej k:

$P(0,3) \quad k: 3x-4y+2=0$

$$d(P,k)=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 3+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$$

$P(-2,-3) \quad k: x-y+1=0$

$$d(P,k)=\frac{|-2+\cdot 3+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Ćwiczenia - odległość punktu od prostej

Oblicz odległość punktu P od prostej k:

$P(0,3) \quad k: 3x - 4y + 2 = 0$

$$d(P,k) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$P(-2,-3) \quad k: x - y + 1 = 0$

$$d(P,k) = \frac{|-2 + \cdot 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$P(1,1) \quad k: y = \frac{2}{3}x + 1$

Ćwiczenia - odległość punktu od prostej

Oblicz odległość punktu P od prostej k:

$P(0,3) \quad k: 3x - 4y + 2 = 0 \qquad d(P,k) = \dfrac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{10}{5} = 2$

$P(-2,-3) \quad k: x - y + 1 = 0 \qquad d(P,k) = \dfrac{|-2 + \cdot 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$P(1,1) \quad k: y = \frac{2}{3}x + 1$

Musimy najpierw zapisać prostą k w postaci ogólnej: $k: 2x - 3y + 3 = 0$.

Ćwiczenia - odległość punktu od prostej

Oblicz odległość punktu P od prostej k:

$P(0,3) \quad k: 3x - 4y + 2 = 0 \qquad d(P,k) = \frac{|3\cdot 0 - 4\cdot 3 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$

$P(-2,-3) \quad k: x - y + 1 = 0 \qquad d(P,k) = \frac{|-2 + \cdot 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$P(1,1) \quad k: y = \frac{2}{3}x + 1$

Musimy najpierw zapisać prostą k w postaci ogólnej: $k: 2x - 3y + 3 = 0$.

$$d(P,k) = \frac{|2 - 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Teraz troszkę zadań ze zbioru do 3. klasy.

Zadanie 8.49 (d)

Chcemy, by punkt $P(a+2, a-1)$ był w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej $k: -2x + y + 3 = 0$.

Zadanie 8.49 (d)

Chcemy, by punkt $P(a+2, a-1)$ był w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej $k: -2x + y + 3 = 0$.

Sprawa wydaje się prosta. Podstawiamy do wzoru na odległość punktu od prostej:

Zadanie 8.49 (d)

Chcemy, by punkt $P(a+2, a-1)$ był w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej $k: -2x + y + 3 = 0$.

Sprawa wydaje się prosta. Podstawiamy do wzoru na odległość punktu od prostej:

$$\frac{|-2(a+2)+(a-1)+3|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = 2\sqrt{5}$$

Zadanie 8.49 (d)

Chcemy, by punkt $P(a+2, a-1)$ był w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej $k : -2x + y + 3 = 0$.

Sprawa wydaje się prosta. Podstawiamy do wzoru na odległość punktu od prostej:

$$\frac{|-2(a+2)+(a-1)+3|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = 2\sqrt{5}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$|-a-2| = 10$$

Zadanie 8.49 (d)

Chcemy, by punkt $P(a+2, a-1)$ był w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej $k: -2x + y + 3 = 0$.

Sprawa wydaje się prosta. Podstawiamy do wzoru na odległość punktu od prostej:

$$\frac{|-2(a+2) + (a-1) + 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$|-a-2| = 10$$

To już proste równanie, dostajemy dwa rozwiązania $a = -12$ lub $a = 8$.

Zadanie 8.55

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2,3)$, $B(-2,2)$ oraz $C(2,0)$.
Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta.

Zadanie 8.55

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2,3)$, $B(-2,2)$ oraz $C(2,0)$. Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta. Wyznaczymy te równania w postaci ogólnej.

Zadanie 8.55

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2, 3)$, $B(-2, 2)$ oraz $C(2, 0)$. Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta. Wyznaczymy te równania w postaci ogólnej.

AB Tutaj zauważamy, że współrzędna x się nie zmienia, co oznacza, że będzie to pionowa prosta $x = -2$ lub w postaci ogólnej $x + 2 = 0$.

Zadanie 8.55

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2, 3)$, $B(-2, 2)$ oraz $C(2, 0)$. Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta. Wyznaczymy te równania w postaci ogólnej.

AB Tutaj zauważamy, że współrzędna x się nie zmienia, co oznacza, że będzie to pionowa prosta $x = -2$ lub w postaci ogólnej $x + 2 = 0$.

AC Mamy $\overrightarrow{AC} = [4, -3]$, czyli wektor prostopadły to np. $[3, 4]$.

Zadanie 8.55

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2,3)$, $B(-2,2)$ oraz $C(2,0)$. Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta. Wyznaczymy te równania w postaci ogólnej.

AB Tutaj zauważamy, że współrzędna x się nie zmienia, co oznacza, że będzie to pionowa prosta $x = -2$ lub w postaci ogólnej $x + 2 = 0$.

AC Mamy $\overrightarrow{AC} = [4, -3]$, czyli wektor prostopadły to np. $[3, 4]$. Zapisujemy równanie:

$$3x + 4y + C = 0$$

C obliczamy podstawiając np. punkt A.

Zadanie 8.55

Mamy dany trójkąt o wierzchołkach $A(-2,3)$, $B(-2,2)$ oraz $C(2,0)$. Najpierw wyznaczamy równania prostych zawierających boki tego trójkąta. Wyznaczymy te równania w postaci ogólnej.

AB Tutaj zauważamy, że współrzędna x się nie zmienia, co oznacza, że będzie to pionowa prosta $x = -2$ lub w postaci ogólnej $x + 2 = 0$.

AC Mamy $\overrightarrow{AC} = [4, -3]$, czyli wektor prostopadły to np. $[3, 4]$. Zapisujemy równanie:

$$3x + 4y + C = 0$$

C obliczamy podstawiając np. punkt A. Otrzymujemy $3x + 4y - 6 = 0$.

Zadanie 8.55

BC Mamy $\overrightarrow{BC} = [4, -2]$, wektor prostopadły to np. $[1, 2]$, mamy więc prostą o postaci:

$$x + 2y + C$$

Podstawiając np. punkt B otrzymujemy: $x + 2y - 2 = 0$.

Zadanie 8.55

BC Mamy $\overrightarrow{BC} = [4, -2]$, wektor prostopadły to np. $[1, 2]$, mamy więc prostą o postaci:

$$x + 2y + C$$

Podstawiając np. punkt B otrzymujemy: $x + 2y - 2 = 0$.

Ostatecznie mamy rówania protych zawierających boki:

Zadanie 8.55

BC Mamy $\overrightarrow{BC} = [4, -2]$, wektor prostopadły to np. $[1, 2]$, mamy więc prostą o postaci:

$$x + 2y + C$$

Podstawiając np. punkt B otrzymujemy: $x + 2y - 2 = 0$.

Ostatecznie mamy rówania protych zawierających boki:

AB: $x + 2 = 0$

Zadanie 8.55

BC Mamy $\overrightarrow{BC} = [4, -2]$, wektor prostopadły to np. $[1, 2]$, mamy więc prostą o postaci:

$$x + 2y + C$$

Podstawiając np. punkt B otrzymujemy: $x + 2y - 2 = 0$.

Ostatecznie mamy rówania protych zawierających boki:

AB: $x + 2 = 0$

AC: $3x + 4y - 6 = 0$

Zadanie 8.55

BC Mamy $\overrightarrow{BC} = [4, -2]$, wektor prostopadły to np. $[1, 2]$, mamy więc prostą o postaci:

$$x + 2y + C$$

Podstawiając np. punkt B otrzymujemy: $x + 2y - 2 = 0$.

Ostatecznie mamy równania protych zawierających boki:

AB: $x + 2 = 0$

AC: $3x + 4y - 6 = 0$

BC: $x + 2y - 2 = 0$

Zadanie 8.55 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

Zadanie 8.55 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2, 3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x + 2y - 2 = 0$.

Zadanie 8.55 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2, 3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x + 2y - 2 = 0$.

$$h_A = \frac{|-2+6-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Zadanie 8.55 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2,3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x + 2y - 2 = 0$.

$$h_A = \frac{|-2+6-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

h_B Liczymy odległość $B(-2,2)$ od prostej zawierającej bok AC, czyli $3x + 4y - 6 = 0$.

Zadanie 8.55 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2,3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x+2y-2=0$.

$$h_A = \frac{|-2+6-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

h_B Liczymy odległość $B(-2,2)$ od prostej zawierającej bok AC, czyli $3x+4y-6=0$.

$$h_B = \frac{|-6+8-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$$

Zadanie 8.55 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2,3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x + 2y - 2 = 0$.

$$h_A = \frac{|-2+6-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

h_B Liczymy odległość $B(-2,2)$ od prostej zawierającej bok AC, czyli $3x + 4y - 6 = 0$.

$$h_B = \frac{|-6+8-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$$

h_C Liczymy odległość $C(2,0)$ od prostej zawierającej bok AB, czyli $x + 2 = 0$.

Zadanie 8.55 (b)

By obliczyć długość wysokości, wystarczy oczywiście obliczyć odległość wierzchołka od prostej zawierającej przeciwległy bok.

h_A Długość wysokości z wierzchołka A, to odległość $A(-2,3)$ od prostej zawierającej bok BC, czyli $x + 2y - 2 = 0$.

$$h_A = \frac{|-2+6-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

h_B Liczymy odległość $B(-2,2)$ od prostej zawierającej bok AC, czyli $3x + 4y - 6 = 0$.

$$h_B = \frac{|-6+8-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}$$

h_C Liczymy odległość $C(2,0)$ od prostej zawierającej bok AB, czyli $x + 2 = 0$. Tutaj nie potrzeba wzoru, mamy pionową prostą $x = -2$, ta odległość to oczywiście 4.

Zadanie 8.60

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k : 2x + y - 1 = 0$ oraz $m : 11x - 2y + 1 = 0$.

Zadanie 8.60

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k : 2x + y - 1 = 0$ oraz $m : 11x - 2y + 1 = 0$. Skoro punkt P leży na osi

OY, to możemy zapisać jego współrzędne jako $P(0, y)$.

Zadanie 8.60

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k: 2x + y - 1 = 0$ oraz $m: 11x - 2y + 1 = 0$. Skoro punkt P leży na osi

OY, to możemy zapisać jego współrzędne jako $P(0, y)$. Teraz zapiszmy odległości od prostych:

Zadanie 8.60

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k: 2x + y - 1 = 0$ oraz $m: 11x - 2y + 1 = 0$. Skoro punkt P leży na osi

OY, to możemy zapisać jego współrzędne jako $P(0, y)$. Teraz zapiszmy odległości od prostych:

$$d(P, k) = \frac{|y - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|y - 1|}{\sqrt{5}}$$

Zadanie 8.60

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k: 2x + y - 1 = 0$ oraz $m: 11x - 2y + 1 = 0$. Skoro punkt P leży na osi

OY, to możemy zapisać jego współrzędne jako $P(0, y)$. Teraz zapiszmy odległości od prostych:

$$d(P, k) = \frac{|y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|y-1|}{\sqrt{5}}$$

$$d(P, m) = \frac{|-2y+1|}{\sqrt{11^2+(-2)^2}} = \frac{|-2y+1|}{\sqrt{125}} = \frac{|-2y+1|}{5\sqrt{5}}$$

Zadanie 8.60

Mamy znaleźć punkt P na osi OY, który jest równoodległy od prostych $k: 2x + y - 1 = 0$ oraz $m: 11x - 2y + 1 = 0$. Skoro punkt P leży na osi

OY, to możemy zapisać jego współrzędne jako $P(0, y)$. Teraz zapiszmy odległości od prostych:

$$d(P,k) = \frac{|y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|y-1|}{\sqrt{5}}$$

$$d(P,m) = \frac{|-2y+1|}{\sqrt{11^2+(-2)^2}} = \frac{|-2y+1|}{\sqrt{125}} = \frac{|-2y+1|}{5\sqrt{5}}$$

Chcemy rozwiązać równanie:

$$d(P,k) = d(P,m)$$

Zadanie 8.60

Rozwiązujemy:

$$\frac{|y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2y+1|}{5\sqrt{5}}$$

Zadanie 8.60

Rozwiązujemy:

$$\frac{|y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2y+1|}{5\sqrt{5}}$$

Po skróceniu $\sqrt{5}$ i pomnożeniu obu stron przez 5, otrzymamy:

Zadanie 8.60

Rozwiązujemy:

$$\frac{|y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2y+1|}{5\sqrt{5}}$$

Po skróceniu $\sqrt{5}$ i pomnożeniu obu stron przez 5, otrzymamy:

$$5|y-1| = |-2y+1|$$

Zadanie 8.60

Rozwiązujemy:

$$\frac{|y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2y+1|}{5\sqrt{5}}$$

Po skróceniu $\sqrt{5}$ i pomnożeniu obu stron przez 5, otrzymamy:

$$5|y-1| = |-2y+1|$$

Ponieważ obie strony są dodatnie, najszybciej będzie podnieść je do kwadratu i tym samym pozbyć się wartości bezwzględnej (od razu też przeniosę wszystko na jedną stronę):

Zadanie 8.60

Rozwiązujemy:

$$\frac{|y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2y+1|}{5\sqrt{5}}$$

Po skróceniu $\sqrt{5}$ i pomnożeniu obu stron przez 5, otrzymamy:

$$5|y-1| = |-2y+1|$$

Ponieważ obie strony są dodatnie, najszybciej będzie podnieść je do kwadratu i tym samym pozbyć się wartości bezwzględnej (od razu też przeniosę wszystko na jedną stronę):

$$5^2(y-1)^2 - (-2y+1)^2 = 0$$

Zadanie 8.60

$$5^2(y-1)^2-(-2y+1)^2=0$$

Zadanie 8.60

$$5^2(y-1)^2 - (-2y+1)^2 = 0$$

Teraz mamy różnicę kwadratów:

$$(5(y-1) - (-2y+1))(5(y-1) + (-2y+1)) = 0$$

Zadanie 8.60

$$5^2(y-1)^2 - (-2y+1)^2 = 0$$

Teraz mamy różnicę kwadratów:

$$(5(y-1) - (-2y+1))(5(y-1) + (-2y+1)) = 0$$

Czyli:

$$(7y-6)(3y-4) = 0$$

Zadanie 8.60

$$5^2(y-1)^2 - (-2y+1)^2 = 0$$

Teraz mamy różnicę kwadratów:

$$(5(y-1) - (-2y+1))(5(y-1) + (-2y+1)) = 0$$

Czyli:

$$(7y-6)(3y-4) = 0$$

Czyli $y = \frac{6}{7}$ lub $y = \frac{4}{3}$,

Zadanie 8.60

$$5^2(y-1)^2-(-2y+1)^2=0$$

Teraz mamy różnicę kwadratów:

$$(5(y-1)-(-2y+1))(5(y-1)+(-2y+1))=0$$

Czyli:

$$(7y-6)(3y-4)=0$$

Czyli $y=\frac{6}{7}$ lub $y=\frac{4}{3}$, szukane punkty to $(0,\frac{6}{7})$ i $(0,\frac{4}{3})$.

Na poniedziałkowych zajęciach dokończymy zadania z tego rozdziału, ale proszę, poza dokładnym przestudiowaniem tej prezentacji, zrobić pozostałe podpunkty z zadania 8.48.