

1. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzenie ułamków algebraicznych

1.1. **1.1.** Wśród poniższych wyrażeń znajdują się ułamki algebraiczne. Wskaż je.

a) $\frac{0,5x^3 + 8x + 1}{x^2}$

b) $\frac{2x - 5}{3}$

c) $\frac{2|x|}{x^3 - 8}$

d) $\sqrt{\frac{x}{x+2}}$

e) $\frac{3}{x^3 - 8x^2 + 6}$

f) $\frac{7 - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$

Odp. a), b), e)

1.2. **1.2.** Wyznacz dziedzinę danego ułamka algebraicznego.

a) $\frac{9x}{5x - 10}$

b) $\frac{1}{(x+1)(5-x)}$

c) $\frac{4x+2}{x^2+4}$

d) $\frac{3x-7}{9x^2-81}$

e) $\frac{3x-5}{x^2+2x+1}$

f) $\frac{x^3-1}{x^3+8}$

Odp. a) $R - \{2\}$ b) $R - \{-1, 5\}$ c) R d) $R - \{-3, 3\}$ e) $R - \{-1\}$ f) $R - \{-2\}$

1.3. **1.3.** Wyznacz dziedzinę danego ułamka algebraicznego.

a) $\frac{x^2 + x + 4}{x^2 - 5x + 6}$

b) $\frac{x+1}{x^3 - 4x^2}$

c) $\frac{3x^3 + 8x + 5}{8x^4 - x}$

d) $\frac{x^2 + 5}{x^3 - 9x^2 + x - 9}$

e) $\frac{2x-7}{x^4 + x^2 - 20}$

f) $\frac{2x^3 - 5x + 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

g) $\frac{-7x+2}{x^3 + 4x + 5}$

h) $\frac{x-3}{5x^3 - 15x^2 - 5x + 15}$

i) $\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^5 + 3x^3 - 4x^2}$

Odp. a) $R - \{2, 3\}$ b) $R - \{0, 4\}$ c) $R - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ d) $R - \{9\}$ e) $R - \{-2, 2\}$

f) $R - \{1\}$ g) $R - \{-1\}$ h) $R - \{-1, 1, 3\}$ i) $R - \{0, 1\}$

1.4. **1.4.** Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest dany zbiór.

a) \mathbf{R}

b) $\mathbf{R} - \{1\}$

c) $\mathbf{R} - \{0\}$

d) $\mathbf{R} - \{0, 3\}$

e) $\mathbf{R} - \{-2, 3\}$

f) $\mathbf{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

g) $\mathbf{R} - \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

h) $\mathbf{R} - \{-1, 1, 2, 4\}$

1.5. **1.5.** Oblicz wartość danego ułamka algebraicznego dla podanej obok liczby.

a) $\frac{-x^2+3}{(2-x)(2+x)}, -1$

b) $\frac{x^2-5x+6}{x^8+4x^2+7}, 3$

c) $\frac{2x^2+1}{x^3-1}, 2$

d) $\frac{32-x^2}{2x^3+8x^2+5x+20}, -3$

 Odp. a) $\frac{2}{3}$ b) 0 c) $\frac{9}{7}$ d) 1

1.6. **1.6.** Oblicz wartość danego ułamka algebraicznego dla podanej obok liczby. Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{Q}$.

a) $\frac{x}{x-2}, 3\sqrt{2}+2$

b) $\frac{x+1}{x-2}, 1-\sqrt{3}$

c) $\frac{x^2}{x^2-3}, 1+\sqrt{2}$

d) $\frac{(6-x)(2+x)}{(x-1)^2}, 2-\sqrt{2}$

 Odp. a) $1+\frac{1}{3}\sqrt{2}$ b) $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ c) $1+\frac{3}{4}\sqrt{2}$ d) $42+28\sqrt{2}$

1.7. **1.7.** Oblicz wartość danego ułamka algebraicznego dla podanej obok liczby. Wynik przedstaw w postaci ułamka o wymiernym mianowniku.

a) $\frac{1}{x+2}, 2\sqrt[3]{3}$

b) $\frac{x^3}{3(x-1)}, \sqrt[3]{2}$

c) $\frac{2x^3}{x^2+x+1}, \sqrt[3]{5}$

d) $\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{3}-1$

 Odp. a) $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{8}$ b) $\frac{2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}{3}$ c) $\frac{5(\sqrt[3]{5}-1)}{2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{3}+1}{4}$

1.8. **1.8.** Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest zbiór $\mathbf{R} - \{0\}$ i który dla liczby 1 przyjmuje wartość 3.

1.9. **1.9.** Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest zbiór $\mathbf{R} - \{2, 3\}$ i który dla liczby -1 przyjmuje wartość 5 .

1.10. **1.10.** Wyznacz wszystkie wartości m , $m \in \mathbf{R}$, dla których dziedziną ułamka algebraicznego jest zbiór liczb rzeczywistych.

$$\text{a) } \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2x + m}$$

$$\text{b) } \frac{x}{x^2 + 5x + 9m^2}$$

$$\text{c) } \frac{1 - 2x}{x^2 + 3mx + m}$$

Odp. a) $m \in (1, +\infty)$ b) $m \in \left(-\infty, -\frac{5}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$ c) $m \in \left(0, \frac{4}{9}\right)$

1.11. **1.11.** Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

$$\text{a) } \frac{3x^{12}}{6x^8}$$

$$\text{b) } \frac{-15(-x)^2}{3x}$$

$$\text{c) } \frac{7(-x)^{13} + 5(-x)^{12}}{x^{10}}$$

$$\text{d) } \frac{(x^3)^2 - 5(x^2)^3}{2x^7}$$

$$\text{e) } \frac{[3(-x)^2]^2 - 8x^4}{2(-x)^5 + 3x^5}$$

$$\text{f) } \frac{x^6(-3x)^2 + 9x^8}{18x^4 \cdot x^3}$$

Odp. a) $\frac{1}{2}x^4$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ b) $-5x$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ c) $-7x^3 + 5x^2$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$

d) $\frac{-2}{x}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ e) $\frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ f) x , $x \in \mathbf{R} - \{0\}$

1.12. **1.12.** Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

$$\text{a) } \frac{x^2 - 4}{3x + 6}$$

$$\text{b) } \frac{5 + x}{25 - x^2}$$

$$\text{c) } \frac{4x^2 - 9}{(3 - 2x)(3 + 2x)}$$

$$\text{d) } \frac{4 - 81x^2}{-9x - 2}$$

$$\text{e) } \frac{x^2 - 2x + 1}{5x - 5}$$

$$\text{f) } \frac{9x^2 - 1}{1 - 6x + 9x^2}$$

Odp. a) $\frac{x-2}{3}$, $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$ b) $\frac{1}{5-x}$, $x \in \mathbf{R} - \{-5, 5\}$ c) -1 , $x \in \mathbf{R} - \left\{-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$

d) $9x - 2$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{2}{9}\right\}$ e) $\frac{x-1}{5}$, $x \in \mathbf{R} - \{1\}$ f) $\frac{3x+1}{3x-1}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

1.13. **1.13.** Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$

b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15}$

c) $\frac{-2x^2 - 14x + 16}{3x^2 + 15x - 72}$

d) $\frac{2x^2 - 3x - 9}{4x^2 - 11x - 3}$

e) $\frac{2x^3 - 32x}{3x^2 + 12x}$

f) $\frac{4x^4 - 400x^2}{x^3 - 13x^2 + 30x}$

Odp. a) $\frac{x-3}{x-2}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$ b) $\frac{x-3}{x+5}, x \in \mathbf{R} - \{-5, 3\}$ c) $\frac{-2x+2}{3x-9}, x \in \mathbf{R} - \{-8, 3\}$

d) $\frac{2x+3}{4x+1}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{4}, 3\right\}$ e) $\frac{2x-8}{3}, x \in \mathbf{R} - \{-4, 0\}$

f) $\frac{4x^2+40x}{x-3}, x \in \mathbf{R} - \{0, 3, 10\}$

1.14. **1.14.** Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{36x+3x^2-3x^3}{x^2+6x+9}$

b) $\frac{2x^7-8x^3}{3x^5+6x^3}$

c) $\frac{3x^3+2x^2-3x-2}{2x^4-2}$

d) $\frac{8x^4-x}{4x^2+2x+1}$

e) $\frac{75x^2-30x+12}{125x^3+8}$

f) $\frac{x^4-x^2-12}{x^4+8x^2+15}$

Odp. a) $\frac{-3x^2+12x}{x+3}, x \in \mathbf{R} - \{3\}$ b) $\frac{2x^2-4}{3}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ c) $\frac{3x+2}{2x^2+2}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

d) $2x^2-x, x \in \mathbf{R}$ e) $\frac{3}{5x+2}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{2}{5}\right\}$ f) $\frac{x^2-4}{x^2+5}, x \in \mathbf{R}$

1.15. **1.15.** Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+3x+2}$

b) $\frac{x^4-3x^2-4}{2x^4-8x^2}$

c) $\frac{2x^3+x-3}{4x^2+4x+6}$

d) $\frac{8x^3+12x^2+6x+1}{4x^3+4x^2+x}$

e) $\frac{2x^2+4x-6}{x^3-3x^2-9x+27}$

f) $\frac{x^4-8x^2-9}{x^4-13x^2+36}$

Odp. a) $x-2, x \in \mathbf{R} - \{-2, 1\}$ b) $\frac{x^2+1}{2x^2}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 2\}$ c) $\frac{x-1}{2}, x \in \mathbf{R}$

d) $\frac{2x+1}{x}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$ e) $\frac{2x-2}{(x-3)^2}, x \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$

f) $\frac{x^2+1}{x^2-4}, x \in \mathbf{R} - \{-3, -2, 2, 3\}$.

1.16. **1.16.** Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

$$\text{a) } \frac{3x^2(x-2)+4(x-2)}{9x^4-16} \quad \text{b) } \frac{x^3(3x-1)-(1-3x)x}{27x^3-1} \quad \text{c) } \frac{25x^3+50x^2-x-2}{5x^2+9x-2}$$

$$\text{d) } \frac{2x^3+2x-4}{x^3-x^2+3x-3} \quad \text{e) } \frac{216x^3+8}{12x^2-20x-8} \quad \text{f) } \frac{(x-2)^3-1}{x^3-3x^2}$$

$$\text{Odp. a) } \frac{x-2}{3x^2-4}, x \in \mathbf{R} - \left\{ -\frac{2\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{2} \right\} \quad \text{b) } \frac{x^3+x}{9x^2+3x+1}, x \in \mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{c) } 5x+1, x \in \mathbf{R} - \left\{ -2, \frac{1}{5} \right\} \quad \text{d) } \frac{2x^2+2x+4}{x^2+3}, x \in \mathbf{R} - \{1\}$$

$$\text{e) } \frac{18x^2-6x+2}{x-2}, x \in \mathbf{R} - \left\{ -\frac{1}{3}, 2 \right\} \quad \text{f) } \frac{x^2-3x+3}{x^2}, x \in \mathbf{R} - \{0, 3\}$$

1.17. **1.17.** Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych mianownikach. Podaj konieczne założenia.

$$\text{a) } \frac{3x}{4} = \frac{\quad}{16x} \quad \text{b) } \frac{-2x^2}{9} = \frac{\quad}{18x^3} \quad \text{c) } \frac{3}{x-2} = \frac{\quad}{2-x}$$

$$\text{d) } \frac{5}{2} = \frac{\quad}{2x-8} \quad \text{e) } \frac{x+1}{x} = \frac{\quad}{x(x-2)} \quad \text{f) } \frac{2x}{x+3} = \frac{\quad}{x^2-9}$$

$$\text{Odp. a) } \frac{12x^2}{16x}, x \in \mathbf{R} - \{0\} \quad \text{b) } \frac{-4x^5}{18x^3}, x \in \mathbf{R} - \{0\} \quad \text{c) } \frac{-3}{2-x}, x \in \mathbf{R} - \{2\} \quad \text{d) } \frac{5x-20}{2x-8},$$

$$x \in \mathbf{R} - \{4\} \quad \text{e) } \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}, x \in \mathbf{R} - \{0, 2\} \quad \text{f) } \frac{2x^2-6x}{x^2-9}, x \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$$

1.18. **1.18.** Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych mianownikach. Podaj konieczne założenia.

$$\text{a) } \frac{3}{x} = \frac{\quad}{x^2-6x} \quad \text{b) } \frac{x-1}{x-2} = \frac{\quad}{6x^2-3x^3} \quad \text{c) } \frac{3}{x-2} = \frac{\quad}{x^2-x-2}$$

$$\text{d) } \frac{x}{x+1} = \frac{\quad}{2x^2+4x+2} \quad \text{e) } \frac{5}{x-2} = \frac{\quad}{x^3-8} \quad \text{f) } \frac{x+2}{x^2-x+1} = \frac{\quad}{x^3+1}$$

$$\text{Odp. a) } \frac{3x-18}{x^2-6x}, x \in \mathbf{R} - \{0, 6\} \quad \text{b) } \frac{-3x^3+3x^2}{6x^2-3x^3}, x \in \mathbf{R} - \{0, 2\}$$

$$\text{c) } \frac{3x+3}{x^2-x-2}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 2\} \quad \text{d) } \frac{2x^2+2x}{2x^2+4x+2}, x \in \mathbf{R} - \{-1\}$$

$$\text{e) } \frac{5x^2+10x+20}{x^3-8}, x \in \mathbf{R} - \{2\} \quad \text{f) } \frac{x^2+3x+2}{x^3+1}, x \in \mathbf{R} - \{-1\}$$

1.19. **1.19.** Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych mianownikach. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{\quad}{x^3+3x^2-4x-12}$$

$$b) \frac{x}{x^2+1} = \frac{\quad}{x^4-3x^2-4}$$

$$c) \frac{2}{x-1} = \frac{\quad}{x^3-3x^2+3x-1}$$

$$d) \frac{3}{x-1} = \frac{\quad}{x^3+4x^2-5}$$

Odp. a) $\frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2-4x-12}$, $x \in \mathbf{R} - \{-3, -2, 2\}$ b) $\frac{x^3-4x}{x^4-3x^2-4}$, $x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

c) $\frac{2x^2-4x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$, $x \in \mathbf{R} - \{1\}$ d) $\frac{3x^2+15x+15}{x^3+4x^2-5}$, $x \in \mathbf{R} - \{1\}$

1.20. **1.20.** Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych licznikach. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{3}{5x} = \frac{3x^2}{\quad}$$

$$b) \frac{x+1}{x-2} = \frac{x^2+x}{\quad}$$

$$c) \frac{9-x}{3} = \frac{81-x^2}{\quad}$$

$$d) \frac{2}{x-3} = \frac{6-2x}{\quad}$$

$$e) \frac{3x-1}{x^2+5} = \frac{3x^3-x^2}{\quad}$$

$$f) \frac{x^2-3}{x} = \frac{x^4-9}{\quad}$$

Odp. a) $\frac{3x^2}{5x^3}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ b) $\frac{x^2+x}{x^2-2x}$, $x \in \mathbf{R} - \{0, 2\}$ c) $\frac{81-x^2}{27+3x}$, $x \in \mathbf{R} - \{-9\}$

d) $\frac{6-2x}{-x^2+6x-9}$, $x \in \mathbf{R} - \{3\}$ e) $\frac{3x^3-x^2}{x^4+5x^2}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ f) $\frac{x^4-9}{x^3+3x}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$

1.21. **1.21.** Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych licznikach. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{x^2-3x}{x+1} = \frac{x^3-9x}{\quad}$$

$$b) \frac{2x+3}{x-5} = \frac{4x^2+12x+9}{\quad}$$

$$c) \frac{x^2-1}{x} = \frac{x^4+2x^2-3}{\quad}$$

$$d) \frac{x-1}{x} = \frac{3x^3-3x^2+x-1}{\quad}$$

$$e) \frac{2x-3}{3x} = \frac{8x^3-27}{\quad}$$

$$f) \frac{2x+1}{x+1} = \frac{10x^3+5x^2+8x+4}{\quad}$$

Odp. a) $\frac{x^3-9x}{x^2+4x+3}$, $x \in \mathbf{R} - \{-3, -1\}$ b) $\frac{4x^2+12x+9}{2x^2-7x-15}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{-1\frac{1}{2}, 5\right\}$

c) $\frac{x^4+2x^2-3}{x^3+3x}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ d) $\frac{3x^3-3x^2+x-1}{3x^3+x}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$

e) $\frac{8x^3-27}{12x^3+18x^2+27x}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ f) $\frac{10x^3+5x^2+8x+4}{5x^3+5x^2+4x+4}$, $x \in \mathbf{R} - \{-1\}$

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych

1.22. **1.22.** Wykonaj podane działania.

$$a) \frac{x}{2} - \frac{3x+1}{4} + \frac{8-x}{8}$$

$$b) 2x^2 - \frac{(x-1)(x+1)}{3} + \frac{5x-7}{6}$$

$$c) \frac{x-7}{5} - \frac{x^2+2}{3} + \frac{2x^2+31}{15}$$

$$d) \frac{1-6x}{3} + \frac{x^2+8}{2} - \frac{12x+5x^2}{6}$$

$$e) \frac{(x+3)(x-2)}{2} - \frac{(x-1)(x+4)}{5} - x$$

$$f) \frac{(3-x)(3+x)}{8} - \frac{2(x-1)}{4} - \frac{x^2+1}{16}$$

Odp. a) $\frac{-3x+6}{8}$ b) $\frac{10x^2+5x-5}{6}$ c) $\frac{-x^2+x}{5}$ d) $\frac{-x^2-12x+13}{3}$

e) $\frac{3x^2-11x-22}{10}$ f) $\frac{-3x^2-8x+25}{16}$

1.23. **1.23.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{3}{x+2} - \frac{x-4}{x+2}$$

$$b) \frac{2x-7}{x-3} - \frac{3(x-4)}{x-3}$$

$$c) 9 - \frac{x+7}{x+1}$$

$$d) 1 - \frac{4}{x+5}$$

$$e) \frac{x+7}{x-5} - \frac{4}{5-x}$$

$$f) \frac{2x-3}{x-1} + \frac{x+4}{1-x}$$

Odp. a) $\frac{7-x}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ b) $\frac{5-x}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ c) $\frac{8x+2}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

d) $\frac{x+1}{x+5}$, $x \in \mathbb{R} - \{-5\}$ e) $\frac{x+11}{x-5}$, $x \in \mathbb{R} - \{5\}$ f) $\frac{x-7}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

1.24. **1.24.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{x^2+3x}{x^2-1}$$

$$b) \frac{2x}{x^3-8x^2} - \frac{4x-16}{x^3-8x^2}$$

$$c) \frac{5-2x}{x^2+4x} + \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

$$d) \frac{2-2x}{x^2-9} - \frac{x-5}{9-x^2}$$

$$e) 4 - \frac{3x^2-8x+4}{x^2-2x}$$

$$f) \frac{x^2-3x}{(x-3)^2} - 1$$

Odp. a) -1 , $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ b) $\frac{-2}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0, 8\}$ c) $\frac{1}{x+4}$, $x \in \mathbb{R} - \{-4, 0\}$

d) $\frac{-1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ e) $\frac{x+2}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$ f) $\frac{3}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

1.25. **1.25.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{x}{x-4} - \frac{x+1}{4-x} - \frac{2x+3}{x-4}$$

$$b) \frac{3x-2}{x-2} + 3 - \frac{4x+5}{2-x}$$

$$c) \frac{2x-5}{2x-3} - \frac{5}{2} - \frac{x+1}{3-2x}$$

$$d) 3 - \frac{x+2}{4x-1} - \frac{2x+5}{1-4x}$$

$$e) \frac{3}{4} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$f) \frac{2(x-1)}{x^2-4} - \frac{x+6}{4-x^2} + 1\frac{1}{2}$$

Odp. a) $\frac{-2}{x-4}, x \in \mathbf{R} - \{4\}$ b) $\frac{10x-3}{x-2}, x \in \mathbf{R} - \{2\}$ c) $\frac{-4x+7}{4x-6}, x \in \mathbf{R} - \left\{1\frac{1}{2}\right\}$

d) $\frac{13x}{4x-1}, x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$ e) $\frac{x^2+11}{4(1-x^2)}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

f) $\frac{3x^2+6x-4}{2x^2-8}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

1.26. **1.26.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2}$$

$$b) \frac{3x}{2} - \frac{x^2+2x}{x+3}$$

$$c) \frac{2}{5x} - \frac{1}{x-1}$$

$$d) \frac{3x-1}{4} - \frac{x^2}{x+2}$$

$$e) \frac{3}{x-3} + \frac{x+4}{x}$$

$$f) \frac{x}{x+2} - \frac{3x+1}{3x}$$

Odp. a) $\frac{2x-1}{x^2}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ b) $\frac{x^2+5x}{2(x+3)}, x \in \mathbf{R} - \{-3\}$ c) $\frac{-3x-2}{5x(x-1)}, x \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$

d) $\frac{-x^2+5x-2}{4(x+2)}, x \in \mathbf{R} - \{-2\}$ e) $\frac{x^2+4x-12}{x(x-3)}, x \in \mathbf{R} - \{0, 3\}$

f) $\frac{-7x-2}{3x(x+2)}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 0\}$

1.27. **1.27.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2}$$

$$b) \frac{x-2}{x-3} - \frac{x-1}{x+3}$$

$$c) \frac{3x}{2x+1} + \frac{x^2}{(2x+1)^2}$$

$$d) \frac{x^2-1}{4x^2+12x+9} - \frac{2}{2x+3}$$

$$e) \frac{x+4}{x-1} - \frac{x+1}{x-4}$$

$$f) \frac{x+5}{x-5} - \frac{2-x}{2+x}$$

Odp. a) $\frac{2x}{(x-2)(x+2)}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$ b) $\frac{5x-9}{(x-3)(x+3)}, x \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$

c) $\frac{7x^2+3x}{(2x+1)^2}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ d) $\frac{x^2-4x-7}{(2x+3)^2}, x \in \mathbf{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$

e) $\frac{-15}{(x-1)(x-4)}, x \in \mathbf{R} - \{1, 4\}$ f) $\frac{2x^2+20}{(x-5)(2+x)}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 5\}$

1.28. **1.28.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - 3$ b) $\frac{x+2}{x} - \frac{x^2-3}{x^2} + \frac{3-x^2}{x^3}$

c) $\frac{5}{x-1} + 1 + \frac{4}{x+1}$ d) $\frac{3x^3+5x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - 3x$

e) $\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2}$ f) $\frac{2}{x+3} - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{2}$

Odp. a) $\frac{-3x^2+2x+1}{x^2}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ b) $\frac{x^2+3x+3}{x^3}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$

c) $\frac{x^2+9x}{x^2-1}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ d) $\frac{-6x^2+3x+1}{(x+1)^2}, x \in \mathbf{R} - \{-1\}$

e) $\frac{-3x^2+5x-6}{x^2(x-2)}, x \in \mathbf{R} - \{0, 2\}$ f) $\frac{x^2+3x-4}{2(x+3)(x+2)}, x \in \mathbf{R} - \{-3, -2\}$

1.29. **1.29.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{4x^2-25} + \frac{3x}{2x-5} - 1$ b) $\frac{x}{x+2} + 4 + \frac{7}{x-3}$

c) $2 + \frac{7-x}{x+3} + \frac{x+3}{x-7}$ d) $\frac{x-2}{x+1} - 3 + \frac{x-1}{x+2}$

Odp. a) $\frac{2x^2+15x+26}{(2x-5)(2x+5)}, x \in \mathbf{R} - \left\{-2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\frac{5x^2-10}{(x+2)(x-3)}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 3\}$

c) $\frac{2x^2+12x-82}{(x+3)(x-7)}, x \in \mathbf{R} - \{-3, 7\}$ d) $\frac{-x^2-9x-11}{(x+1)(x+2)}, x \in \mathbf{R} - \{-2, -1\}$

1.30. **1.30.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{x^2+5}{x^2-3x} - \frac{x+1}{x-3}$$

$$b) \frac{x-2}{2x-5} + \frac{3x^2+1}{2x^2-5x}$$

$$c) \frac{x^3}{x^3-1} - \frac{x^2+3}{x^2+x+1}$$

$$d) \frac{x-2}{x^2+4} + \frac{5x-2x^2}{2x^3+8x}$$

$$e) \frac{2x^2-11x}{x^2-5x} - \frac{2x-1}{x}$$

$$f) \frac{x^3-6}{3x^4+x^2} - \frac{x+2}{3x^2+1}$$

Odp. a) $\frac{5-x}{x(x-3)}, x \in \mathbf{R} - \{0, 3\}$ b) $\frac{4x^2-2x+1}{x(2x-5)}, x \in \mathbf{R} - \left\{0, 2\frac{1}{2}\right\}$

c) $\frac{x^2-3x+3}{x^3-1}, x \in \mathbf{R} - \{1\}$ d) $\frac{1}{2(x^2+4)}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$

e) $\frac{-5}{x(x-5)}, x \in \mathbf{R} - \{0, 5\}$ f) $\frac{-2x^2-6}{x^2(3x^2+1)}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$

1.31. **1.31.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{x-1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$b) \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-2x}$$

$$c) \frac{x-1}{2x+3} - \frac{x+1}{3-2x} + \frac{x^2-4}{4x^2-9}$$

$$d) \frac{2x^2-1}{4-x^2} + \frac{x+2}{x-2} - \frac{x+1}{x+2}$$

$$e) \frac{2x^2-3x}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{x-3} + 1$$

$$f) \frac{x+2}{x-1} - \frac{4}{x^2-2x+1} - \frac{x+1}{x}$$

Odp. a) $\frac{x^3+x^2-4x-3}{x^2(x-1)}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 0\}$ b) $\frac{1}{x(x-2)}, x \in \mathbf{R} - \{0, 2\}$

c) $\frac{5x^2+2}{4x^2-9}, x \in \mathbf{R} - \left\{-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$ d) $\frac{2x^2-5x-7}{4-x^2}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

e) $\frac{2x^2-8x+15}{(x-3)^2}, x \in \mathbf{R} - \{3\}$ f) $\frac{2x^2-5x-1}{x(x-1)^2}, x \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$

1.32. **1.32.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{x-2}{x^2-4x} + \frac{x^2-1}{x^2-8x+16} - \frac{1}{2x}$$

$$b) \frac{x^2-1}{x^2-5x} - \frac{x^2-3}{x^2-10x+25} - \frac{1}{5-x}$$

$$c) \frac{2x}{x^2-4x+4} - \frac{x}{x^2-2x} - \frac{1}{x+1}$$

$$d) \frac{5x}{x^2-6x+9} - \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x^2+3x}$$

Odp. a) $\frac{2x^2+x-6}{2(x-4)^2}, x \in \mathbf{R} - \{0, 4\}$ b) $\frac{-4x^2-3x+5}{x(x-5)^2}, x \in \mathbf{R} - \{0, 5\}$
 c) $\frac{7x-2}{(x+1)(x-2)^2}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 2\}$ d) $\frac{x^3+16x^2+30x+9}{(x-3)^2x(x+3)}, x \in \mathbf{R} - \{-3, 0, 3\}$

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych

1.33. **1.33.** Wykonaj mnożenie ułamków. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3}{x} \cdot \frac{x^2}{6}$ b) $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2-x}{2}$ c) $\frac{4}{x+1} \cdot \frac{2x+2}{8x^2}$
 d) $\frac{x+3}{2} \cdot \frac{16}{x^2-9}$ e) $\frac{x-1}{3} \cdot \frac{4x}{x^2-x}$ f) $\frac{3x-6}{x^2-4} \cdot \frac{5}{7x}$

Odp. a) $\frac{x}{2}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ b) $\frac{x-1}{2x}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ c) $\frac{1}{x^2}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 0\}$ d) $\frac{8}{x-3},$
 $x \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$ e) $\frac{4}{3}, x \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$ f) $\frac{15}{7x(x+2)}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 2\}$

1.34. **1.34.** Wykonaj mnożenie ułamków. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2x-4}{5} \cdot \frac{10x}{x^2-4x+4}$ b) $\frac{2x+3}{x^2+6} \cdot \frac{2x^2+12}{4x^2-9}$
 c) $\frac{x^2-1}{x^2-81} \cdot \frac{x-9}{x+1}$ d) $\frac{3x^3+6x^2}{x-4} \cdot \frac{6x-24}{9x^2-36}$
 e) $\frac{x^3+8}{3x^2-3} \cdot \frac{6x+6}{x^2-2x+4}$ f) $\frac{2x^2+8x}{216-x^3} \cdot \frac{x^2+6x+36}{x^2-16}$

Odp. a) $\frac{4x}{x-2}, x \in \mathbf{R} - \{2\}$ b) $\frac{2}{2x-3}, x \in \mathbf{R} - \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$
 c) $\frac{x-1}{x+9}, x \in \mathbf{R} - \{-9, -1, 9\}$ d) $\frac{2x^2}{x-2}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 2, 4\}$
 e) $\frac{2x+4}{x-1}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ f) $\frac{-2x}{(x-6)(x-4)}, x \in \mathbf{R} - \{-4, 4, 6\}$

1.35. **1.35.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{3x^2+3x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{6x}$$

$$b) \frac{4x^3-8x^2}{16x^2-64} \cdot \frac{4x+8}{x^2}$$

$$c) \frac{49-x^2}{x^2+8x+7} \cdot \frac{x+1}{2x-14} \cdot \frac{x}{2}$$

$$d) \frac{x^4-1}{2x^2+2} \cdot \frac{4}{3x^2-3} \cdot 9x$$

$$e) \frac{5x^2-20}{7x+14} \cdot \frac{14x+42}{x^2+x-6} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$f) \left(-\frac{x}{21}\right) \cdot \frac{3x^2-3}{x^2-4x-5} \cdot \frac{7x-35}{2x-2}$$

Odp. a) $\frac{1}{2}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$ b) $1, x \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 2\}$ c) $-\frac{x}{4}, x \in \mathbf{R} - \{-7, -1, 7\}$

d) $6x, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ e) $-2, x \in \mathbf{R} - \{-3, -2, 2\}$ f) $-\frac{x}{2}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1, 5\}$

1.36. **1.36.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{x^2-1}{x^2+x-6} \cdot \frac{x^2+7x+12}{x^2+x-2}$$

$$b) \frac{x^2+2x-3}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^2+6x+9}$$

$$c) \frac{2x^2+5x-3}{3x^2+7x+4} \cdot \frac{9x^2+24x+16}{4x^2-1}$$

$$d) \frac{5x^2+7x+2}{x^2+2x+1} \cdot \frac{3x^2+2x-1}{25x^2-4}$$

$$e) \frac{2x^2-x-3}{4x^2-7x-2} \cdot \frac{8x^2-32}{2x^2+x-6}$$

$$f) \frac{2x^2+9x-5}{5x^2+3x-2} \cdot \frac{x^2+4x+3}{2x^2+5x-3}$$

Odp. a) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-4}, x \in \mathbf{R} - \{-3, -2, 1, 2\}$ b) $\frac{x^2+x-2}{x^2+x-6}, x \in \mathbf{R} - \{-3, -2, 2\}$

c) $\frac{3x^2+13x+12}{2x^2+3x+1}, x \in \mathbf{R} - \left\{-1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ d) $\frac{3x-1}{5x-2}, x \in \mathbf{R} - \left\{-1, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}$

e) $\frac{8x+8}{4x+1}, x \in \mathbf{R} - \left\{-2, -\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 2\right\}$ f) $\frac{x+5}{5x-2}, x \in \mathbf{R} - \left\{-3, -1, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right\}$

1.37. **1.37.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$a) \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x^2+8x+15}$$

$$b) \frac{x^3+5x^2-2x-10}{x^2-2} \cdot \frac{2}{x^2+10x+25}$$

$$c) \frac{2x^3-14x^2-8x+56}{2x^2-18} \cdot \frac{3x^2+7x-6}{x^2-9x+14}$$

$$d) \frac{2x^3+6x^2+x+3}{4x^2+11x-3} \cdot \frac{3x^2+2x-1}{2x^3+2x^2+x+1}$$

$$e) \frac{x^3-6x^2+5}{x^3-27} \cdot \frac{x^2+3x+9}{4x-4}$$

$$f) \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4} \cdot \frac{8x+1}{3x^2-6x}$$

Odp. a) $\frac{1}{x+5}, x \in \mathbf{R} - \{-5, -3, -1, 1\}$ b) $\frac{2}{x+5}, x \in \mathbf{R} - \{-5, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
 c) $\frac{3x^2+4x-4}{x-3}, x \in \mathbf{R} - \{-3, 2, 3, 7\}$ d) $\frac{3x-1}{4x-1}, x \in \mathbf{R} - \left\{-3, -1, \frac{1}{4}\right\}$
 e) $\frac{x^2-5x-5}{4x-12}, x \in \mathbf{R} - \{1, 3\}$ f) $\frac{8x+1}{3x}, x \in \mathbf{R} - \{0, 2\}$

1.38. **1.38.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{x^2} : \frac{x}{4}$ b) $\frac{2x}{5} : 4 : x$ c) $\frac{1}{2} + \frac{x-2}{x-1} : \frac{2}{3x}$
 d) $4 \cdot \frac{3}{x-1} : \frac{2}{x}$ e) $\frac{3}{x+1} : \frac{1}{2x+2} \cdot \frac{2}{x}$ f) $1 - \frac{1}{x+6} : \frac{1}{36-x^2}$

Odp. a) $\frac{4}{x^3}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ b) $\frac{1}{10}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ c) $\frac{3x^2-5x-1}{2x-2}, x \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$
 d) $\frac{6x}{x-1}, x \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$ e) $\frac{12}{x}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 0\}$ f) $x-5, x \in \mathbf{R} - \{-6, 6\}$

1.39. **1.39.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{x} + \frac{x}{x-3} : \frac{x^2}{4x-12}$ b) $3x - \frac{4}{x+2} : \frac{1}{4-x^2}$
 c) $\frac{5x}{x^2+10x+25} : \frac{10}{x^2-25}$ d) $\frac{5x}{9x^2-81} : \frac{1}{27-9x}$
 e) $\frac{x^2-2x+1}{4x^2+2x+1} : \frac{3x^2-3}{8x^3-1}$ f) $\frac{125x^3+1}{x^2-4x} : \frac{25x^2-5x+1}{x-4}$

Odp. a) $\frac{5}{x}, x \in \mathbf{R} - \{0, 3\}$ b) $7x-8, x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$ c) $\frac{x^2-5x}{2x+10}, x \in \mathbf{R} - \{-5, 5\}$
 d) $\frac{-5x}{x+3}, x \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$ e) $\frac{2x^2-3x+1}{3x+3}, x \in \mathbf{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}, 1\right\}$
 f) $\frac{5x+1}{x}, x \in \mathbf{R} - \{0, 4\}$

1.40. **1.40.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3x-3}{5x+10} : \frac{3x^2-3}{10x^2-40}$ b) $\frac{2x^2+6x}{x^2+4x+4} : \frac{x^2+6x+9}{x^2-4}$

c) $\frac{25x^2 - 10x + 1}{x^2 - 9} : \frac{10x - 2}{5x + 15}$

d) $\frac{2x^2 + 5x - 3}{10x - 20} : \frac{4x^2 - 1}{3x - 6}$

e) $\frac{6x^2 + 13x - 5}{4 - x^2} : \frac{3x^2 + 20x - 7}{-x^2 - 5x + 14}$

f) $\frac{7x^2 + 13x - 2}{3x^2 - 19x + 20} : \frac{7x^2 + 6x - 1}{2x^2 - 7x - 15}$

Odp. a) $\frac{2x - 4}{x + 1}, x \in \mathbf{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$ b) $\frac{2x^2 - 4x}{x^2 + 5x + 6}, x \in \mathbf{R} - \{-3, -2, 2\}$

c) $\frac{25x - 5}{2x - 6}, x \in \mathbf{R} - \left\{-3, \frac{1}{5}, 3\right\}$ d) $\frac{3x + 9}{20x + 10}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$

e) $\frac{2x + 5}{x + 2}, x \in \mathbf{R} - \left\{-7, -2, \frac{1}{3}, 2\right\}$ f) $\frac{2x^2 + 7x + 6}{3x^2 - x - 4}, x \in \mathbf{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{7}, 1, \frac{1}{3}, 5\right\}$

1.41. **1.41.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^3 + 8x^2 - x - 8}{x^2 + 9x + 8} : \frac{2x^2 - 2}{x + 3}$

b) $\frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 10}{x^2 + x - 30} : \frac{x^3 + 2x}{x + 6}$

c) $\frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 15}{x^3 + x^2 + 3x + 3} : \frac{2x - 10}{3x + 3}$

d) $\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x^3 + 5x^2 + x + 5} : \frac{2x + 4}{7x^2 + 7}$

e) $\frac{2x^3 - x - 1}{2x^2 + x - 3} : \frac{2x^2 + 2x + 1}{4x^2 - 9}$

f) $\frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 7x + 10} : \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 10x + 25}$

Odp. a) $\frac{x + 3}{2x + 2}, x \in \mathbf{R} - \{-8, -3, -1, 1\}$ b) $\frac{1}{x}, x \in \mathbf{R} - \{-6, 0, 5\}$

c) $\frac{3}{2}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 5\}$ d) $\frac{7x - 14}{2}, x \in \mathbf{R} - \{-5, -2\}$

e) $2x - 3, x \in \mathbf{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\}$ f) $\frac{x^2 + x + 2}{x + 2}, x \in \mathbf{R} - \{-5, -2, 2\}$

Działania na utamkach algebraicznych

1.42. **1.42.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $3x^2 : [2x^3 : (x + 1)]$

b) $2 : x : \frac{3}{x} - \frac{2x + 5}{x - 4}$

c) $\left(5 - \frac{2}{x}\right) \cdot (5 + 2x : x^2)$

d) $\left(1 + \frac{1}{x + 1}\right) : \left(3 - \frac{2}{x + 1}\right)$

e) $\left(3 - \frac{x}{x + 2}\right) : (x + 3)$

f) $2 - \frac{x^2 - 25}{x + 3} \cdot \frac{4x + 12}{x^2 + 5x}$