

c) $\frac{25x^2 - 10x + 1}{x^2 - 9} : \frac{10x - 2}{5x + 15}$

d) $\frac{2x^2 + 5x - 3}{10x - 20} : \frac{4x^2 - 1}{3x - 6}$

e) $\frac{6x^2 + 13x - 5}{4 - x^2} : \frac{3x^2 + 20x - 7}{-x^2 - 5x + 14}$

f) $\frac{7x^2 + 13x - 2}{3x^2 - 19x + 20} : \frac{7x^2 + 6x - 1}{2x^2 - 7x - 15}$

Odp. a) $\frac{2x - 4}{x + 1}, x \in \mathbf{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$ b) $\frac{2x^2 - 4x}{x^2 + 5x + 6}, x \in \mathbf{R} - \{-3, -2, 2\}$

c) $\frac{25x - 5}{2x - 6}, x \in \mathbf{R} - \left\{-3, \frac{1}{5}, 3\right\}$ d) $\frac{3x + 9}{20x + 10}, x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$

e) $\frac{2x + 5}{x + 2}, x \in \mathbf{R} - \left\{-7, -2, \frac{1}{3}, 2\right\}$ f) $\frac{2x^2 + 7x + 6}{3x^2 - x - 4}, x \in \mathbf{R} - \left\{-1\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{7}, 1\frac{1}{3}, 5\right\}$

1.41. **1.41.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^3 + 8x^2 - x - 8}{x^2 + 9x + 8} : \frac{2x^2 - 2}{x + 3}$

b) $\frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 10}{x^2 + x - 30} : \frac{x^3 + 2x}{x + 6}$

c) $\frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 15}{x^3 + x^2 + 3x + 3} : \frac{2x - 10}{3x + 3}$

d) $\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x^3 + 5x^2 + x + 5} : \frac{2x + 4}{7x^2 + 7}$

e) $\frac{2x^3 - x - 1}{2x^2 + x - 3} : \frac{2x^2 + 2x + 1}{4x^2 - 9}$

f) $\frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 7x + 10} : \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 10x + 25}$

Odp. a) $\frac{x + 3}{2x + 2}, x \in \mathbf{R} - \{-8, -3, -1, 1\}$ b) $\frac{1}{x}, x \in \mathbf{R} - \{-6, 0, 5\}$

c) $\frac{3}{2}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 5\}$ d) $\frac{7x - 14}{2}, x \in \mathbf{R} - \{-5, -2\}$

e) $2x - 3, x \in \mathbf{R} - \left\{-1\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}\right\}$ f) $\frac{x^2 + x + 2}{x + 2}, x \in \mathbf{R} - \{-5, -2, 2\}$

Działania na utamkach algebraicznych

1.42. **1.42.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $3x^2 : [2x^3 : (x + 1)]$

b) $2 : x : \frac{3}{x} - \frac{2x + 5}{x - 4}$

c) $\left(5 - \frac{2}{x}\right) \cdot (5 + 2x : x^2)$

d) $\left(1 + \frac{1}{x + 1}\right) : \left(3 - \frac{2}{x + 1}\right)$

e) $\left(3 - \frac{x}{x + 2}\right) : (x + 3)$

f) $2 - \frac{x^2 - 25}{x + 3} \cdot \frac{4x + 12}{x^2 + 5x}$

Odp. a) $\frac{3x+3}{2x}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 0\}$ b) $\frac{4x+23}{12-3x}, x \in \mathbf{R} - \{0, 4\}$
 c) $\frac{25x^2-4}{x^2}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ d) $\frac{x+2}{3x+1}, x \in \mathbf{R} - \left\{-1, \frac{-1}{3}\right\}$
 e) $\frac{2}{x+2}, x \in \mathbf{R} - \{-3, -2\}$ f) $\frac{20-2x}{x}, x \in \mathbf{R} - \{-5, -3, 0\}$

1.43. **1.43.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2-\frac{1}{x}}{4x^2-4x+1}$ b) $\frac{x^2-4}{\frac{3x-6}{5-x}}$ c) $\frac{\frac{x-1}{1+\frac{3x}{2}}-\frac{2}{2}}{\frac{2x}{x+5}-\frac{x}{1-x^2}}$
 d) $\frac{3-\frac{x+2}{x-1}}{-2x^2+7x-5}$ e) $\frac{\frac{x-1}{2}+\frac{x-3}{x}}{2-x}$ f) $\frac{\frac{2x}{x+5}-\frac{x}{1-x^2}}{1-x^2}$

Odp. a) $\frac{1}{2x^2-x}, x \in \mathbf{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\frac{-x^2+3x+10}{3}, x \in \mathbf{R} - \{2, 5\}$
 c) $\frac{2}{5x-5}, x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{-2}{3}, 1\right\}$ d) $\frac{-1}{x^2-2x+1}, x \in \mathbf{R} - \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$
 e) $\frac{-x-3}{2x}, x \in \mathbf{R} - \{0, 2\}$ f) $\frac{-x^2-x}{x+2}, x \in \mathbf{R} - \{-5, -2, -1, 1\}$

1.44. **1.44.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\left(\frac{1+a}{1-a}-\frac{1-a}{1+a}\right) \cdot \frac{1}{4a}$ b) $\frac{2+\frac{1}{a}}{a+2} \cdot \frac{a^2+4a+4}{2a+1} - \frac{2}{a}$
 c) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4a}{a+2}$ d) $\left(\frac{3}{a}-2+\frac{a}{3}\right) \cdot \frac{6a}{a^2-9}$
 e) $3-\left(a-\frac{a-1}{a}\right) : \frac{a^2-a+1}{4}$ f) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2a^3}\right) : \left(a-1+\frac{1}{a}\right)$

Odp. a) $\frac{1}{1-a^2}, a \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$ b) $1, a \in \mathbf{R} - \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0\right\}$ c) $\frac{2-a}{2}, a \in \mathbf{R} - \{-2, 0\}$
 d) $\frac{2a-6}{a+3}, a \in \mathbf{R} - \{-3, 0, 3\}$ e) $\frac{3a-4}{a}, a \in \mathbf{R} - \{0\}$ f) $\frac{a+1}{2a^2}, a \in \mathbf{R} - \{0\}$

1.45. **1.45.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$\text{a) } \left(\frac{1}{a^2+a} + \frac{a-2}{a+1} \right) : \left(\frac{1}{a} - 2 + a \right) \quad \text{b) } 1 : \left(1 - \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} \right) - \frac{4}{(a+1)(a-2)}$$

$$\text{c) } \left(a+1 - \frac{3}{a-1} \right) : \left(a - \frac{a^2}{a-1} \right) \cdot \frac{1}{2a^2-8} \quad \text{d) } \frac{-2a}{a+3} \cdot \left(a-2 : \frac{1}{a+3} - \frac{9}{a} \right)$$

$$\text{e) } \left(\frac{a^4-1}{a^2+1} - 3 \right) \cdot \frac{a}{2a^2-8} - \frac{3}{a+1} \quad \text{f) } \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{3a} + \frac{3}{a+1} \right) : \left(\frac{9}{a+1} + \frac{5}{a} \right)$$

Odp. a) $\frac{1}{a+1}, a \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$ b) $\frac{2-a}{2}, a \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 2\}$

c) $\frac{-1}{2a}, a \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 1, 2\}$ d) $2a+6, a \in \mathbf{R} - \{-3, 0\}$

e) $\frac{a^2+a-6}{2a+2}, a \in \mathbf{R} - \{-2, -1, 2\}$ f) $\frac{1}{3}, a \in \mathbf{R} - \left\{ -1, -\frac{5}{14}, 0 \right\}$

1.46. **1.46.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{a^2-1}{2a+6} \cdot \frac{1 + \frac{1}{a+2}}{1 - \frac{1}{a+2}} \quad \text{b) } \frac{25-a^2}{4a+8} : \left[\frac{3-(a^2-1)}{a^2+4a+4} + \frac{3}{a+2} \right]$$

$$\text{c) } \left(a - \frac{a+3}{a-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{a-3} - \frac{1}{a+1} \right) \quad \text{d) } \left[\frac{(a+2)^2 - a^2}{4a^2-4} - \frac{3}{a^2-a} \right] : \frac{a^2-3a}{a-1}$$

Odp. a) $\frac{a}{2}, a \in \mathbf{R} - \{-3, -2, -1\}$ b) $\frac{a+5}{4}, a \in \mathbf{R} - \{-2, 5\}$

c) $\frac{4}{a-1}, a \in \mathbf{R} - \{-1, 1, 3\}$ d) $\frac{1}{a^2}, a \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 1, 3\}$

1.47. **1.47.** Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, to $6a : \left[\left(\frac{a+3}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-3}{2} \right)^2 \right] = 2$.

1.48. **1.48.** Wykaż, że jeśli $a \in \mathbf{R}$, to $\left(\frac{a^2-1}{a^2+1} \right)^2 + \left(\frac{2a}{a^2+1} \right)^2 = 1$.

1.49. **1.49.** Wykaż, że jeśli $a \in \mathbf{R} - \left\{ -2, \frac{1}{3}, 1, 2 \right\}$, to $\left(\frac{3a^2+2a-1}{3a-1} - \frac{3}{a-1} \right) : \frac{2a^2-8}{a-1} = \frac{1}{2}$.

1.50. **1.50.** Wykaż, że jeśli $a \in \mathbf{R} - \{-2, 0, 2\}$, to wartość wyrażenia $\frac{\frac{a-1}{4} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}} \cdot \frac{2}{a^2 - 4} + 3$ jest stała.

1.51. **1.51.** Wykaż, że jeśli $a \neq -b$ i $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to wartość wyrażenia $\left(\frac{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{a^2 + b^2}{a + b}}{3a + 3b} \right)$ jest stała.

1.52. **1.52.** Wykaż, że jeśli $a \in \mathbf{R} - \{-2, 0\}$, to prawdziwa jest równość: $\left(\frac{a^2 + 1}{8} + \frac{1}{a} \right) : \left(\frac{a}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{a} \right) : \frac{(a-2)^2 + 8a}{1 + \frac{2}{a}} = \frac{1}{2a}$.

1.53. **1.53.** Wykaż, że jeśli $a \in \mathbf{R} - \{-6, 3\}$, to zachodzi równość: $\left[\left(\frac{a-3}{3} \right)^2 - \frac{(3+a)^2 - 12a}{9-3a} \right] \cdot \frac{9}{a^2 + 3a - 18} = \frac{a}{a+6}$.

1.54. **1.54.** Wykaż, że jeśli $\frac{b}{3a+2b} = \frac{1}{5}$ i $b \neq \frac{-3a}{2}$, to $\frac{4a+5b}{11a-2b} = 1$.

1.55. **1.55.** Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbf{R} - \{0\}$ i $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, to $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{b^2}{c^2}$.

1.56. **1.56.** Wykaż, że jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$ oraz $\frac{2}{b} - \frac{3}{a} = 2a - 3b$, to $b = \frac{2}{3}a$ lub $ab = 1$

1.57. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci. Podaj konieczne założenia.

a) $\left(\frac{1}{x+1} + x \right) \cdot \left(\frac{x}{x-1} - 1 \right) - \left(\frac{1}{x+1} + 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{x-1} - x \right)$

b) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}} \cdot \left(1 + \frac{(1+x^2) - 4}{2x} \right)$

c) $\frac{x-1}{x^2+x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}-\sqrt{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x-1} - 2 \right) : \frac{2-x}{\sqrt{2}}$

$$d) \left(\frac{3x+6}{x^3+x^2+x+1} - \frac{x+2}{x^3-x^2+x-1} \right) : \left(\frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{2x+2} - \frac{3}{2x-2} \right)$$

$$\text{Odp. a) } \frac{x^2+3x+1}{x+1}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\} \quad b) \frac{(x+3)^2}{2x}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$$

$$c) \frac{1}{x^2+x+1}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1, 2\} \quad d) 1, x \in \mathbf{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$$

1.58. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci. Podaj konieczne założenia.

$$a) \left(\frac{3}{x-1} - \frac{3x^2+3x+3}{x^2-1} : \frac{x^4-x}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x-x^2}{3}$$

$$b) \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1-x^2}{1+x^2} \right) : \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right)$$

$$c) \left[\frac{x^2-2x+4}{x-2} : (x^3+8) + \frac{x-2}{8+x^3} \cdot \frac{x^2-2x+4}{x^2-4} \right] \cdot (x^2-4)$$

$$d) \left(\frac{4x}{x+2} - \frac{x^3-8}{x^3+8} \cdot \frac{4x^2-8x+16}{x^2-4} \right) : \frac{16}{x+2}$$

$$\text{Odp. a) } 1-x, x \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\} \quad b) \frac{x}{1+x^2}, x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\} \quad c) \frac{2x}{x+2}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$$

$$d) \frac{-1}{x+2}, x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$$

1.59. Wyznacz wielomiany $P(x)$ oraz $Q(x)$ tak, aby zachodziła poniższa równość:

$$a) \frac{P(x)}{3x+1} + \frac{Q(x)}{x-2} = \frac{11x-1}{3x^2-5x-2} \text{ oraz st.}P(x)=0 \text{ i st.}Q(x)=0$$

$$b) \frac{P(x)}{x-2} - \frac{Q(x)}{x-4} = \frac{2x^2-10x-2}{x^2-6x+8} \text{ oraz st.}P(x)=1 \text{ i st.}Q(x)=0$$

$$c) \frac{P(x)}{4x+5} + \frac{Q(x)}{3x-1} = \frac{4x^2+21x+1}{12x^2+11x-5} \text{ oraz st.}P(x)=0 \text{ i st.}Q(x)=1$$

$$\text{Odp. a) } P(x) = 2, Q(x) = 3, \text{ gdzie } x \in \mathbf{R} - \left\{ -\frac{1}{3}, 2 \right\}$$

$$b) P(x) = 2x + 3, Q(x) = 5, \text{ gdzie } x \in \mathbf{R} - \{2, 4\}$$

$$c) P(x) = 4, Q(x) = x + 1, \text{ gdzie } x \in \mathbf{R} - \left\{ -1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right\}$$

1.60. Wyznacz liczby a, b, c tak, aby:

$$\text{a) } \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+2x+4} = \frac{x^2+10x}{x^3-8}$$

$$\text{b) } \frac{a}{x-1} - \frac{b}{2-x} - \frac{c}{x+3} = \frac{13x-21}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

Odp. a) $a = 2, b = -1, c = 4$ b) $a = 2, b = 1, c = 3$

D 1.61. Wykaż, że jeśli $a, b \in \mathbf{R} - \{0\}$, $a \neq -2b$ oraz $6ab - 3a^2 = 2b^2 - ab$, to

$$\frac{2a+b}{a+2b} = \frac{5}{4} \quad \text{lub} \quad \frac{2a+b}{a+2b} = \frac{5}{7}.$$

Odp. *wskazówka:* Daną równość doprowadź do postaci $2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 7\left(\frac{b}{a}\right) + 3 = 0$. Następnie rozwiąż równanie $2x^2 - 7x + 3 = 0$, gdzie $x = \frac{b}{a}$.

D 1.62. Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbf{R} - \{0\}$ oraz $a + b + c = 0$, to $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = 3$.

Odp. *wskazówka:* Podstaw $a = -b - c$ do wyrażenia $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$.

1.63. Wykaż, że jeśli a, b, c, x, y, z są różne od zera oraz $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ oraz

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0, \text{ to } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Odp. *wskazówka:* Równość $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ pomnóż kolejno stronami przez $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$.

Z otrzymanych zależności wyznacz $\frac{x^2}{a^2}, \frac{y^2}{b^2}, \frac{z^2}{c^2}$. Następnie przekształć sumę

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \text{ korzystając z założenia } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0.$$

Równania wymierne

1.57. **1.64.** Rozwiąż dane równanie.

$$a) \frac{x+2}{x-2} = 0$$

$$b) \frac{4x^2+9}{3x+6} = 0$$

$$c) \frac{(2x-5)(3-x)}{x^2+9} = 0$$

$$d) \frac{x(x-2)}{4x^2-4x+1} = 0$$

$$e) \frac{(1-3x)^2}{(2x-3)(5-x)} = 0$$

$$f) \frac{(x-1)(x+2)(x+5)}{x^2+4x-5} = 0$$

Odp. a) $x = -2$ b) Równanie sprzeczne c) $x \in \left\{2\frac{1}{2}, 3\right\}$ d) $x \in \{0, 2\}$ e) $x = \frac{1}{3}$
 f) $x = -2$

1.58. **1.65.** Rozwiąż dane równanie.

$$a) \frac{(x^3-27)(x^2-16)}{6x-18} = 0$$

$$b) \frac{(x^4-1)(x+2)}{x^2(x-1)} = 0$$

$$c) \frac{x^2(x-1)+x-1}{4x+8} = 0$$

$$d) \frac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3} = 0$$

$$e) \frac{2x^3+5x^2-3x}{x^2+6x+9} = 0$$

$$f) \frac{(2x^2+4x)(3-x)}{x^3-4x^2} = 0$$

Odp. a) $x \in \{-4, 4\}$ b) $x \in \{-2, -1\}$ c) $x = 1$ d) $x \in \{-3, -1\}$ e) $x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$
 f) $x \in \{-2, 3\}$

1.59. **1.66.** Rozwiąż dane równanie.

$$a) \frac{x^3-4x^2+3}{x-1} = 0$$

$$b) \frac{x^3-8x-7}{x^2-7} = 0$$

$$c) \frac{3x^3-x^2-6x+2}{4-x^4} = 0$$

$$d) \frac{x^5-8x^3+15x}{x^2+5x} = 0$$

$$e) \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+8} = 0$$

$$f) \frac{x^6-3x^3+2}{x^2-x-2} = 0$$

Odp. a) $x \in \left\{ \frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2} \right\}$ b) $x \in \left\{ -1, \frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2} \right\}$ c) $x = \frac{1}{3}$
 d) $x \in \{-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ e) Równanie sprzeczne f) $x = \sqrt[3]{2}$

1.60. **1.67.** Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$ b) $\frac{x}{3} - \frac{9}{x^2} = 0$ c) $\frac{x}{x^2+3} = 2$
 d) $\frac{(x-2)^2}{2-x} = 2-x$ e) $\frac{6}{x} = x-1$ f) $\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2}{x-3}$

Odp. a) $x \in \{-4, 4\}$ b) $x = 3$ c) Równanie sprzeczne d) $x \in \mathbf{R} - \{2\}$
 e) $x \in \{-2, 3\}$ f) $x = -1\frac{1}{6}$

1.61. **1.68.** Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{20-15x}{3x-4} - 2x = 0$ b) $\frac{x^3-x}{3x^2-3} - \frac{4}{6x-6} = 0$
 c) $\frac{x-5}{x+1} - 1 = x+1$ d) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{2x+3}{x+2} = x-2$
 e) $\frac{x}{2x-3} + \frac{1}{3-2x} = 2x-2$ f) $\frac{2x-1}{x-1} - x = \frac{x+2}{1-x} - 1$

Odp. a) $x = -2\frac{1}{2}$ b) $x = 2$ c) Równanie sprzeczne d) $x \in \{0, 1\}$ $x \in \left\{ 1, 1\frac{3}{4} \right\}$
 f) $x \in \{0, 5\}$

1.62. **1.69.** Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{4}{3x+2} - \frac{5}{x-2} = 0$ b) $\frac{4}{x} - 1 = \frac{1}{x-1}$
 c) $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1} = 1$ d) $\frac{2}{x-3} + \frac{4x}{x+2} = \frac{1}{3}$
 e) $\frac{1}{2-x} + \frac{4}{x^3-8} = 0$ f) $\frac{4x^2}{x^3+27} = \frac{1}{9-3x+x^2}$

Odp. a) $x = -1\frac{7}{11}$ b) $x = 2$ c) Równanie sprzeczne d) $x \in \left\{ 1, 1\frac{7}{11} \right\}$
 e) $x \in \{-2, 0\}$ f) $x \in \left\{ \frac{-3}{4}, 1 \right\}$

1.63. **1.70.** Rozwiąż równania:

$$a) \frac{x+1}{x+2} - \frac{2x}{x+3} = -\frac{1}{5}$$

$$b) \frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x+2} = \frac{2x-2}{x^2+x-2}$$

$$c) \frac{x-2}{x+1} - \frac{x+1}{3-x} = \frac{x^2+x+12}{x^2-2x-3}$$

$$d) \frac{x}{4-x} + \frac{2}{x+4} = \frac{2x+4}{16-x^2}$$

$$e) \frac{x^2+5x+4}{x^3+3x^2+3x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 0$$

$$f) \frac{2x^3+x^2}{16x^2-4} = \frac{2}{2x-1}$$

Odp. a) $x \in \left\{-1\frac{3}{4}, 3\right\}$ b) $x = -1$ c) $x = 5$ d) Równanie sprzeczne

$$e) x = -2 \quad f) x \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$$

1.64. **1.71.** Rozwiąż dane równania.

$$a) \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} = \frac{1}{9x^3}$$

$$b) \frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1}$$

$$c) \frac{2}{x^2+x} - \frac{1}{x} = \frac{6}{x^2}$$

$$d) \frac{3}{x^3+8} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{2}{x^2-2x+4}$$

$$e) \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2-4x+4} = \frac{1}{x^2-2x}$$

$$f) \frac{1}{x^2-1} + \frac{4}{4-x^2} = \frac{x}{x^2+x-2}$$

Odp. a) $x \in \left\{\frac{-1}{3}, \frac{1}{12}\right\}$ b) $x \in \left\{\frac{-1}{2}, 3\right\}$ c) $x \in \{-3, -2\}$ d) $x \in \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$

$$e) x \in \left\{1, 4\frac{2}{3}\right\} \quad f) x \in \{-1-\sqrt{3}, 0, -1+\sqrt{3}\}$$

1.72. Rozwiąż dane równanie.

$$a) \frac{x+1}{x^2+2x-3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2x+1}{2x^2-2x}$$

$$b) \frac{3x}{x^2-2x-3} - \frac{x}{x^2-x-2} + \frac{2}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x^3-4x^2+x+6}$$

$$c) \frac{3x}{x^2-4x+3} - \frac{x}{x^2+x-2} - \frac{8}{x^2-x-6} = \frac{11}{x^3-2x^2-5x+6}$$

$$d) \frac{5}{x^2-x-2} + \frac{x}{x^2+4x+3} - \frac{2x}{x^2+x-6} = \frac{9}{x^3+2x^2-5x-6}$$

Odp. a) $x = 3$ b) $x = 1\frac{1}{2}$ c) $x = -1\frac{1}{2}$ d) $x \in \{-2, 3\}$

1.73. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3$

b) $\frac{x^2 - 6x + 3}{4} - 2 = \frac{5}{x^2 - 6x + 3}$

c) $2(x^2 + 2x - 4) = \frac{24}{x^2 + 2x - 3}$

d) $\frac{2x^2 + x - 1}{3} - \frac{10}{3 - 3x - 6x^2} = 2\frac{1}{3}$

e) $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 8$

f) $4x^2 + \left(\frac{4x}{x-2}\right)^2 - 20 = 0$

Odp. a) $x \in \{-1, 1, 2, 4\}$ b) $x \in \{-1, 1, 5, 7\}$ c) $x \in \{-1 - 2\sqrt{2}, -2, 0, -1 + 2\sqrt{2}\}$
 d) $x \in \left\{-2, -1\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}\right\}$ e) $x \in \{-2, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$ f) $x \in \{-2, 1\}$

1.74. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{2}{|1-3x|} = 3$

b) $\frac{1}{|x+5|} = \frac{2}{|-4-x|}$

c) $\frac{|x+3|}{3} - \frac{1}{|2x+1|} = 0$

d) $\frac{2}{|x|} + \frac{5}{|x-1|} = 0$

e) $\frac{x}{x-1} - 2 = \frac{|x-2|}{2}$

f) $\frac{|2x-1|}{x+3} = |1-2x|$

Odp. a) $x \in \left\{\frac{1}{9}, \frac{5}{9}\right\}$ b) $x \in \left\{-6, -4\frac{2}{3}\right\}$ c) $x \in \left\{-3\frac{1}{2}, -2, -1\frac{1}{2}, 0\right\}$

d) Równanie sprzeczne e) $x = 2$ f) $x \in \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

1.75. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie

$$\frac{(x-3m)(x+m)}{x-6} = 0 \text{ ma jedno rozwiązanie. Podaj to rozwiązanie.}$$

Odp. $m \in \{-6, 0, 2\}$; jeśli $m = 0$, to $x = 0$; jeśli $m = 2$, to $x = -2$; jeśli $m = -6$, to $x = -18$.

1.76. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie

$$\frac{(x-m)(x+2m)}{x^2-4} = 0 \text{ ma jedno rozwiązanie.}$$

Odp. $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

1.77. Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m , gdzie $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $\frac{m+2}{x+3} - \frac{x-1}{4} = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie. Dla znalezionych wartości parametru m podaj to rozwiązanie.

Odp. $m \in \{-3, -2\}$; jeśli $m = -3$, to $x = -1$; jeśli $m = -2$, to $x = 1$

1.78. Wyznacz wszystkie wartości parametru a , $a \in \mathbf{R}$, dla których równanie $\frac{x+4a}{xa+a} - 2 = 0$ ma rozwiązanie. Podaj to rozwiązanie.

Odp. $a \in \mathbf{R} - \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$, $x = \frac{2a}{2a-1}$

1.79. Dla jakich wartości parametru k , $k \in \mathbf{R}$, równanie $\frac{2}{kx-2} = \frac{1}{9x-k}$ nie ma rozwiązań?

Odp. $k \in \{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 18\}$

1.80. Oblicz wartość parametru a , $a \in \mathbf{R}$, dla którego jedyne rozwiązanie (x, y)

układu równań $\begin{cases} (a-1)x - 2y = 3 \\ 4x - (a+1)y = a \end{cases}$ spełnia zależność $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$.

Odp. $a \in \left\{3\frac{1}{2}, 6\right\}$

1.81. Wyznacz wszystkie wartości parametru p , $p \in \mathbf{R}$, dla których równanie

$\frac{x-2p}{3x-2} = \frac{2}{x}$ ma dwa różne rozwiązania.

Odp. $p \in (-\infty, -5) \cup \left(-1, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

1.82. Dla jakich wartości parametru k , $k \in \mathbf{R}$, równanie $2x^2 - (9-k) = \frac{3x^4 - 91}{2x^2 + 9}$ ma dwa różne rozwiązania?

Odp. $k \in \left(-\infty, -1\frac{1}{9}\right) \cup \{-1\}$