2. Ciągi

Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów

2.1. **2.1.** Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n). Podaj pięć początkowych wyrazów tego ciągu.

a) $a_n = 2n^2 - 5n + 1$ b) $a_n = \dfrac{n+4}{2n-3}$ c) $a_n = 3^{n-1} + (-1)^n \cdot (n+1)$.

Odp. a) $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 13$, $a_5 = 26$

b) $a_1 = -5$, $a_2 = 6$, $a_3 = 2\frac{1}{3}$, $a_4 = 1\frac{3}{5}$, $a_5 = 1\frac{2}{7}$

c) $a_1 = -1$, $a_2 = 6$, $a_3 = 5$, $a_4 = 32$, $a_5 = 75$

2.2. **2.2.** Ciąg (b_n) ma pięć wyrazów. Naszkicuj wykres tego ciągu.

a) $b_n = (3-n)(n+1)$ b) $b_n = 2 + (-1)^{n+1}$ c) $b_n = \dfrac{6n}{n+1}$

2.3. **2.3.** Sprawdź, które wyrazy nieskończonego ciągu (a_n) są równe zero.

a) $a_n = (n^2-2)(n^2-4)(n-3)$ b) $a_n = \dfrac{n^2-4n-21}{n^2+1}$

c) $a_n = \dfrac{n^4-256}{n^2-n+2}$ d) $a_n = \dfrac{n^3-8n^2-4n+32}{3n+2}$

Odp. a) a_2, a_3 b) a_7, c) a_4 d) a_2, a_8

2.4. **2.4.** Wyznacz wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+2}$, których wartość jest równa $\dfrac{1}{2}$

b) $b_n = (2n-3)^2$, których wartość jest równa 81

c) $c_n = n^2 \cdot (n^2-5)$, których wartość jest równa -4

d) $d_n = n^3 - 7n^2 + 11n$, których wartość jest równa 5.

Odp. a) a_4 b) b_6 c) c_1, c_2 d) d_1, d_5

2.5. **2.5.** Dany jest wyraz ogólny ciągu (a_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Które wyrazy tego ciągu są liczbami ujemnymi?

a) $a_n = \frac{2n-6}{n+1}$ b) $a_n = n^2 - 7n + 10$ c) $a_n = 2 - |n-3|$

Odp. a) a_1, a_2 b) a_3, a_4 c) wszystkie wyrazy ciągu o numerach większych od 5: a_6, a_7, a_8, ...

2.6. **2.6.** Wyznacz wszystkie wyrazy ciągu (b_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, określonego wzorem:

a) $b_n = |2n-3| - 9$, które są mniejsze od 4

b) $b_n = -n^2 + 4n$, które są większe od -12.

Odp. a) b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7 b) b_1, b_2, b_3, b_4, b_5

2.7. **2.7.** Ciąg (c_n) jest określony wzorem $c_n = \frac{2}{5}n - 2{,}8$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

a) Czy wśród wyrazów tego ciągu znajduje się liczba 2?

b) Ile wyrazów tego ciągu należy do przedziału $\left\langle \frac{1}{2}, 4 \right\rangle$?

Odp. a) tak, $a_{12} = 2$ b) dziewięć wyrazów

2.8. **2.8.** Ciąg (d_n) jest określony wzorem $d_n = 3 - |n-5|$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

a) Sprawdź, czy liczba 4 jest wyrazem tego ciągu.

D b) Wykaż, że ciąg (d_n) ma tylko siedem wyrazów nieujemnych.

Odp. a) liczba 4 nie jest wyrazem ciągu (d_n)

2.9. **2.9.** Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{5n^2 - 43n + 24}{5n-3}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

D Wykaż, że do przedziału $(3, 14\rangle$ należy jedenaście wyrazów tego ciągu.

Odp. *wskazówka:* Rozłóż licznik ułamka $\frac{5n^2 - 43n + 24}{5n-3}$ na czynniki i skróć ułamek.

2.10. **2.10.** Wyznacz wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), będące liczbami naturalnymi, jeśli:

a) $a_n = 2 - \frac{6}{n}$ b) $a_n = \frac{3n-6}{n+2}$ c) $a_n = \frac{n^2 + 11n + 8}{n}$.

Odp. a) $a_3 = 0$, $a_6 = 1$ b) $a_2 = 0$, $a_4 = 1$, $a_{10} = 2$ c) $a_2 = a_4 = 17$, $a_1 = a_8 = 20$

2.11. **2.11.** Wykaż, że wśród wyrazów nieskończonego ciągu (b_n), gdzie $b_n = 3n - 2 \cdot \frac{n+6}{n}$,
D
tylko dwa wyrazy są liczbami pierwszymi.

Odp. *wskazówka:* Najpierw wyznacz wszystkie wyrazy ciągu (b_n), które są liczbami naturalnymi.

2.12. **2.12.** Dany jest ciąg (c_n), gdzie $c_n = \frac{2+n-6n^2}{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}_+$. Wykaż, że wszystkie wy-
D
razy tego ciągu są liczbami całkowitymi ujemnymi.

2.13. **2.13.** Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n). Wyznacz wyrazy: a_{n+1}, a_{2k}, oraz a_{3k-2}, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$.

a) $a_n = \frac{2n-5}{n+1}$ b) $a_n = n^3$ c) $a_n = 2n - n^2$

Odp. a) $a_{n+1} = \frac{2n-3}{n+2}$, $a_{2k} = \frac{4k-5}{2k+1}$, $a_{3k-2} = \frac{6k-9}{3k-1}$ b) $a_{n+1} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, $a_{2k} = 8k^3$, $a_{3k-2} = 27k^3 - 54k^2 + 36k - 8$ c) $a_{n+1} = 1 - n^2$, $a_{2k} = 4k - 4k^2$, $a_{3k-2} = -9k^2 + 18k - 8$

2.14. **2.14.** Wyznacz wyraz ogólny a_n ciągu (a_n), $n \in \mathbf{N}_+$, jeśli

a) $a_{n+1} = n + 4$ b) $a_{n+2} = (n+1)^2$ c) $a_{n+3} = \frac{n+2}{2n+5}$

Odp. a) $a_n = n + 3$ b) $a_n = (n-1)^2$ c) $a_n = \frac{n-1}{2n-1}$

2.15. **2.15.** Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n), wiedząc, że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ spełnione są dwie równości: $a_n + a_{n+1} = \frac{2n+1}{n^2+n}$ oraz $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2+n}$.

Odp. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

2.16. **2.16.** Wyznacz wyraz ogólny a_n nieskończonego ciągu (a_n) wiedząc, że dla dowolnej liczby naturalnej n:

a) $a_{n+1} - a_{n+2} = 7n$ oraz $a_{n+1} + a_{n+2} = 4 - n$

b) $a_{n+2} - a_{n+1} = n^2$ oraz $a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3 - 2n^2$

Odp. a) $a_n = 3n - 1$ b) $a_n = -n^2 + 2n$

2.17. **2.17.** Ciąg (b_n) jest określony za pomocą wzoru rekurencyjnego. Wyznacz b_5.

a) $\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_{n+1} = 2b_n - 1, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_1 = \frac{1}{4} \\ b_{n+1} = (b_n)^2 \cdot 4^n, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} b_1 = -3 \\ b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = -1 \\ b_{n+2} = (n+1) \cdot b_n - b_{n+1}, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

Odp. a) $b_5 = 33$ b) $b_5 = 4^{10}$ c) $b_5 = 1\frac{2}{7}$ d) $b_5 = 28$

2.18. **2.18.** Dany jest ciąg (a_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Wyrazy tego ciągu powstały według pewnej reguły. Wyznacz wyraz ogólny tego ciągu.

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots\right)$

b) $\left(1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$

c) $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 3\frac{3}{4}, 4\frac{4}{5}, \ldots\right)$

d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \ldots\right)$

Odp. a) $a_n = \frac{1}{2n}$ b) $a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$ c) $a_n = n + \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n+1}$ d) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

2.19. **2.19.** Dany jest ciąg (b_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Podaj wyraz ogólny tego ciągu. Następnie zapisz wzór rekurencyjny ciągu (b_n).

a) $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$

b) $\left(9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$

Odp. a) $b_n = 2n - 1$; wzór rekurencyjny: $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + 2, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $b_n = 3^{3-n}$; wzór rekurencyjny: $\begin{cases} b_1 = 9 \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot b_n, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

2.20. **2.20.** Dany jest ciąg (c_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Podaj wzór rekurencyjny tego ciągu. Oblicz c_{10}.

a) $\left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots\right)$

b) $(1, 2, 4, 7, 11, 16, \ldots)$

Odp. a) $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{c_n}, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = c_n + n, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

2.21. **2.21.** Ciąg (d_n) określony jest wzorem rekurencyjnym: $\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_{n+1} = d_n + 2n + 1 \end{cases}$. Wyznacz wyraz ogólny tego ciągu.

Odp. $d_n = n^2$

Monotoniczność ciągów

2.22. **2.22.** Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n). Wykaż na podstawie definicji, że ten ciąg jest rosnący.

D

a) $a_n = \sqrt{3} \cdot n + 1$

b) $a_n = 1 - \dfrac{4}{n+1}$

c) $a_n = n^2 - n - 2$

d) $a_n = \dfrac{10n+4}{2n+1}$

2.23. **2.23.** Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (b_n). Wykaż na podstawie definicji, że ten ciąg jest malejący.

D

a) $b_n = 2 - \dfrac{2}{3}n$

b) $b_n = 7 - (n-1)^2$

c) $b_n = \dfrac{3}{2n+3}$

d) $b_n = 2 - n^3$.

2.24. **2.24.** Zbadaj monotoniczność nieskończonego ciągu (c_n), jeśli:

a) $c_n = n^2 + 3n$

b) $c_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$

c) $c_n = 2 - \dfrac{5}{n+3}$

d) $c_n = 10n - n^2$

e) $c_n = \dfrac{n(n-3)}{2} + 1$

f) $c_n = -2(n^2 - 3n + 1)$.

Odp. a) rosnący b) malejący c) rosnący d) nie jest monotoniczny e) niemalejący f) nierosnący

2.25. **2.25.** Ciąg (a_n) jest skończony. Zbadaj monotoniczność tego ciągu.

a) $a_n = n^2 - 20n$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$

b) $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $a_n = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } n \in \mathbf{N}_+ \text{ i } n \leqslant 7 \\ n, \text{ jeśli } n \in \mathbf{N}_+ \text{ i } 8 \leqslant n \leqslant 15 \end{cases}$

d) $a_n = \begin{cases} -n^2 + 6n - 5, \text{ jeśli } n \in \mathbf{N}_+ \text{ i } n < 4 \\ n+1, \text{ jeśli } n \in \mathbf{N}_+ \text{ i } 4 \leqslant n \leqslant 10 \end{cases}$

Odp. a) malejący b) stały c) niemalejący d) rosnący

2.26. **2.26.** Podaj przykład:

a) pięciowyrazowego ciągu rosnącego o wyrazach mniejszych od -3,

b) sześciowyrazowego ciągu niemalejącego o wyrazach dodatnich,

c) dziesięciowyrazowego ciągu nierosnącego o wyrazach należących do przedziału $\langle -1, 5)$

d) pięciowyrazowego ciągu, który nie jest monotoniczny,

e) nieskończonego ciągu malejącego o wyrazach mniejszych od 2,

f) nieskończonego ciągu nierosnącego o wyrazach niedodatnich.

2.27. **2.27.** Podaj przykład:

a) nieskończonego ciągu rosnącego o wyrazach większych od -8

b) nieskończonego ciągu malejącego o wyrazach mniejszych od 4

c) nieskończonego ciągu niemalejącego o wyrazach nieujemnych

d) nieskończonego ciągu rosnącego o wyrazach z przedziału $\langle 4, 5)$.

Odp. c) np. $a_n = |n - 1{,}5| - 0{,}5$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$ d) np. $a_n = 5 - \frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$

2.28. **2.28.** Dany jest wyraz ogólny ciągu (b_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Sprawdź, czy ten ciąg jest monotoniczny.

a) $b_n = (-3)^n$ b) $b_n = |n - 5|$ c) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3n}$ d) $b_n = 4^{-n+1}$

Odp. a) nie jest monotoniczny b) nie jest monotoniczny c) jest rosnący d) jest malejący

2.29. **2.29.** Zbadaj monotoniczność nieskończonego ciągu (a_n), określonego wzorem rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - 2,\ n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = a_n + 5n,\ n \geqslant 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3},\ n \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{2}{a_n},\ n \geqslant 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -\frac{3a_n}{2},\ n \geqslant 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ n \geqslant 1 \end{cases}$

Odp. a) malejący b) rosnący c) malejący d) nie jest monotoniczny e) nie jest monotoniczny f) niemalejący

2.30. **2.30.** Podaj wyraz ogólny przykładowego nieskończonego malejącego ciągu (a_n) o tej własności, że ciąg (b_n), gdzie $b_n = |a_n|$ jest rosnący.

Odp. $a_n = -n$

2.31. **2.31.** Podaj wyraz ogólny przykładowego nieskończonego rosnącego ciągu (a_n) o tej własności, że ciąg (b_n), gdzie $b_n = |a_n|$ jest malejący.

Odp. np. $a_n = -\frac{1}{n}$

2.32. **2.32.** Podaj wyraz ogólny przykładowego nieskończonego i niemonotonicznego ciągu (a_n) i takiego, że ciąg (b_n), gdzie $b_n = |a_n|$ jest monotoniczny.

Odp. np. $a_n = (-1)^n$

2.33. Ciąg (a_n) jest ciągiem nieskończonym malejącym o wyrazach dodatnich. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n) wiedząc, że:

a) $b_n = -3a_n$ b) $b_n = \frac{1}{4}a_n$ c) $b_n = \frac{1}{a_n}$ d) $b_n = a_n^2$

Odp. a) rosnący b) malejący c) rosnący d) malejący

2.34. Dany jest wyraz ogólny ciągu (c_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Zbadaj monotoniczność tego ciągu.

a) $c_n = 3^{n+5}$ b) $c_n = 7^{1-n}$ c) $c_n = n \cdot 2^n$

d) $c_n = \frac{3^n}{n+1}$ e) $c_n = \frac{n}{5^{n+1}}$ f) $c_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^{n+2}}{n}$

Odp. a) rosnący b) malejący c) rosnący d) rosnący e) malejący f) niemalejący