Zadanie 4. [4 *punkty*]

Oblicz m, dla którego okręgi:

$$o_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = m^2$$

$$o_2 : x^2 + y^2 - 2mx + 2y + m^2 = 0$$

są styczne wewnętrznie.

Okrąg o_1 ma środek w $S_1(2,1)$ oraz promień $r_1 = |m|$. To był bardzo częsty błąd - większość pisała, że promień to m. Ponieważ w równaniu występuje m^2, to m może być równe np. -3, ale wtedy promień to nie -3, ale 3.

Równanie okręgu o_2 w postaci kanonicznej to $(x-m)^2 + (y+1)^2 = 1$. Czyli o_2 ma środek $S_2(m,-1)$ oraz promień $r_2 = 1$.

By okręgi były styczne zewnętrznie, odległości od ich środków muszą się równać różnicy promieni. Ponieważ nie wiemy, który z promieni jest większy zapiszemy to przy użyciu wartości bezwzględnej:

$$|S_1S_2| = \big||m| - 1\big|$$

Mamy $\overrightarrow{S_1S_2} = [m-2, -2]$, czyli $|S_1S_2| = |\overrightarrow{S_1S_2}| = \sqrt{(m-2)^2 + (-2)^2}$. Otrzymujemy:

$$\sqrt{(m-2)^2 + (-2)^2} = \big||m| - 1\big|$$

Podnosimy obie strony do kwadratu:

$$m^2 - 4m + 8 = m^2 - 2|m| + 1$$

Po lewej stronie pozbyłem się jednej wartości bezwzględnej, gdyż $|m|^2 = m^2$, ale drugiej nie mogę się pozbyć. Upraszczamy i dochodzimy do równania:

$$7 = 4m - 2|m|$$

Dla $m \geqslant 0$ otrzymujemy $m = \frac{7}{2}$, natomiast dla $m < 0$ otrzymujemy $m = \frac{7}{6}$. To drugie rozwiązanie odrzucamy, bo ona zakłada, że $m < 0$.

Ostatecznie otrzymujemy $m = \frac{7}{2}$.

Zadanie 9. [6 *punktów*]

Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(0,0)$, $B(1,5)$ oraz $C(4,2)$.

a) Znajdź równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka B.

b) Znajdź rówanie dwusiecznej kąta $\angle BAC$.

a) Wektor $\overrightarrow{AC} = [4,2]$ i jest to wektor prostopadły do szukanej prostej. Nasze równanie możemy więc zapisać jako $4x + 2y + c = 0$ lub lepiej:

$$2x + y + C = 0$$

Podstawiając punkt $B(1,5)$ otrzymujemy $C = -7$, czyli ostatecznie:

$$2x + y - 7 = 0$$

b) Zapisujemy równanie prostej zawierającej bok AB: $5x - y = 0$ oraz prostej zawierającej bok AC: $x - 2y = 0$. Teraz szukamy punktów (x,y), które są równoodległe od tych prostych (definicja dwusiecznej), czyli chcemy, by:

$$\frac{|5x - y|}{\sqrt{26}} = \frac{|x - 2y|}{\sqrt{5}}$$

Mnożymy obie strony przez mianowniki i podnosimy obie strony do kwadratu (zamiast podnoszenia do kwadratu można skorzystać z własności wartości bezwzględnej):

$$125x^2 - 50xy + 5y^2 = 26x^2 - 104xy + 104y^2$$

Przekształcamy do postaci:

$$11y^2 - 6xy - 11x^2 = 0$$

Traktujemy to jako równanie kwadratowe zmiennej y (tak lepiej, gdyż od razu dostaniemy jako odpowiedź równanie prostej w postaci kierunkowej $y = ...$):

$$y = \frac{6x \pm 2|x|\sqrt{130}}{22} = \frac{3 + \sqrt{130}}{11}x$$

Pozbywamy się $||$, gdyż i tak jest $\pm$. Następnie wybieramy odpowiedź z $+$ na podstawie rysunku - nasza dwusieczna ma dodatni współczynnik kierunkowy.

Na lekcji możemy omówić jeszcze dwa inne rozwiązania tego podpunktu.