

Nierówności wymierne

1.104. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\frac{5-x}{6+x} > 0$

b) $\frac{2-x}{x+3} \leq 0$

c) $\frac{x(x-1)}{x-4} \geq 0$

d) $\frac{(5-x^2)}{(x+7)(x+1)} \geq 0$

e) $\frac{-x^2+4x-3}{x^3} < 0$

f) $\frac{2x^2-5x+2}{2-x^2} \leq 0$

Odp. a) $x \in (-6, 5)$ b) $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ c) $x \in (0, 1) \cup (4, +\infty)$

d) $x \in (-7, -\sqrt{5}) \cup (-1, \sqrt{5})$ e) $x \in (0, 1) \cup (3, +\infty)$

f) $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) \cup (2, +\infty)$

1.105. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\frac{5x}{x^2-8x} > 0$

b) $\frac{x+3}{x^2-9} \leq 0$

c) $\frac{-6-3x}{x^2+1} < 0$

d) $\frac{4}{9-x^2} \geq 0$

e) $\frac{(3-2x)^2}{x^2+1} \leq 0$

f) $\frac{x^2+4x+4}{2x^2+x+3} > 0$

Odp. a) $x \in (8, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3)$ c) $x \in (-2, +\infty)$ d) $x \in (-3, 3)$

e) $x = 1\frac{1}{2}$ f) $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$

1.106. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\frac{4}{x} \leq \frac{1}{3}$

b) $\frac{x-3}{2x-1} > 1$

c) $\frac{x-3}{x+5} \geq \frac{2x+11}{x+5}$

d) $\frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x+2}$

f) $\frac{2x^2}{x^2+3} > 2$

Odp. a) $x \in (-\infty, 0) \cup (12, +\infty)$ b) $x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$ c) $x \in (-14, -5)$ d) $x \in \mathbf{R} - \{2\}$

e) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ f) nierówność sprzeczna

1.107. Rozwiąż daną nierówność.

$$\text{a) } \frac{x}{x^2+6x+9} \leq \frac{1}{x+3} \quad \text{b) } \frac{x-4}{3} < \frac{4}{x} \quad \text{c) } 4x+5 \geq \frac{5x^2+4}{x}$$

$$\text{d) } \frac{1-4x^2}{6x-3} \geq 0 \quad \text{e) } \frac{2x-3}{2x^2+1} < 1 \quad \text{f) } \frac{x^3-2x^2+x}{4x^2-25} \geq 0$$

Odp. a) $x \in \mathbf{R} - \{-3\}$ b) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 6)$ c) $x \in (-\infty, 0) \cup \langle 1, 4 \rangle$

d) $x \in \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$ e) $x \in \mathbf{R}$ f) $x \in \left(-2\frac{1}{2}, 0\right) \cup \{1\} \cup \left(2\frac{1}{2}, +\infty\right)$

1.108. Rozwiąż daną nierówność.

$$\text{a) } x^2+x-4 > \frac{4}{x} \quad \text{b) } \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$$

$$\text{c) } \frac{x+3}{x+1} + \frac{8}{x-5} \leq \frac{x-13}{x^2-4x-5} \quad \text{d) } \frac{1}{3x-2-x^2} \geq \frac{3}{7x-4-3x^2}$$

$$\text{e) } \frac{x^2(3-3x)}{x^3+8} \geq \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2-2x+4} \quad \text{f) } \frac{x^3+10}{x^3-27} + \frac{1}{3-x} \leq \frac{1}{9+3x+x^2}$$

Odp. a) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$ b) $x \in (-3, -2) \cup (-1, 1)$

c) $x \in \langle -3, -2 \rangle \cup (-1, 5)$ d) $x \in (-\infty, 1) \cup \left(1\frac{1}{3}, 2\right)$ e) $x \in (-2, -1) \cup \left\langle \frac{2}{3}, 1 \right\rangle$

f) $x \in \langle -2, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$

1.109. Rozwiąż daną nierówność.

$$\text{a) } \frac{-3x^2-x+10}{x+2} \geq 2x \quad \text{b) } \frac{-2x^2+4x+6}{x-3} \leq x$$

$$\text{c) } \frac{x^3-4x^2+x-4}{x^4-1} > 0 \quad \text{d) } \frac{2x^3-x^2-6x+3}{1-4x^2} < 0$$

$$\text{e) } \frac{5x^2-x^4}{x^2-1} \geq \frac{4}{x^2-1} \quad \text{f) } \frac{3x^3+8x^2+2x}{x^2-4} \leq \frac{-1}{x+2}$$

Odp. a) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1)$ b) $x \in \left(-\frac{2}{3}, 3\right) \cup (3, +\infty)$ c) $x \in (-1, 1) \cup (4, +\infty)$

d) $x \in \left(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ e) $x \in \langle -2, -1 \rangle \cup (-1, 1) \cup (1, 2)$

f) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup \left\langle \frac{1}{3}, 2 \right\rangle$

1.110. Rozwiąż daną nierówność.

$$a) \left(\frac{3}{x}-2\right) \cdot \left(\frac{3}{x}+4\right) > 0$$

$$b) \frac{10}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \leq 8$$

$$c) \left(\frac{x}{x-3}-1\right) \cdot \left(\frac{2x}{x-3}+7\right) < 0$$

$$d) \frac{x^2}{4x^2+4x+1} \geq \frac{8x}{2x+1}$$

$$e) \frac{x^4}{(x-1)^2} - \frac{6x^2}{x-1} + 8 \leq 0$$

$$f) \frac{7(x-2)^2}{x} + \left(\frac{4x-x^2-4}{x}\right)^2 \leq 8$$

Odp. a) $x \in \left(\frac{-3}{4}, 0\right) \cup \left(0, 1\frac{1}{2}\right)$ b) $x \in \left(-\infty, -1\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ c) $x \in \left(-\infty, 2\frac{1}{3}\right)$

d) $x \in \left(\frac{-8}{15}, \frac{-1}{2}\right) \cup \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ e) $x = 2$; *wskazówka*: Podstaw $t = \frac{x^2}{x-1}$.

f) $x \in \{-2\} \cup \langle 1, 4 \rangle$; *wskazówka*: Podstaw $t = \frac{(x-2)^2}{x}$.

1.111. Rozwiąż dany układ nierówności.

$$a) \begin{cases} \frac{2x+15}{9} > \frac{1}{5}(x-1) + \frac{x}{3} \\ \frac{x+1}{x} < 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 + x \leq 12 \\ \frac{8}{x^2+2x+1} \leq x+1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^3 - 4x + 4 \geq x^2 \\ \frac{x+7}{x+2} \geq \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x^2 - x^3 \leq 0 \\ \frac{1}{x^2-2x-15} > \frac{1}{x^2-x-2} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} < \frac{8}{x^2-1} \\ \frac{1}{x-2} < 0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \frac{5}{x+3} - \frac{1}{x-1} < 1 \\ \frac{4}{x^2+5x} + \frac{x+1}{x+5} < \frac{2}{x} \end{cases}$$

Odp. a) $x \in (-\infty, 0)$ b) $x \in \langle 1, 3 \rangle$ c) $x \in (-2, 1) \cup \langle 3, +\infty \rangle$ d) $x \in \{0\} \cup (5, +\infty)$
 e) $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$ f) $x \in (-5, -3) \cup (1, 3)$

1.112. Rozwiąż daną nierówność.

$$a) \frac{3}{|x-1|} > \frac{1}{3}$$

$$b) |x-1| \leq \frac{2}{x}$$

$$c) \left| \frac{2x-5}{x+1} \right| \leq 2$$

$$d) \left| \frac{x-3}{2x+8} \right| > 1$$

$$e) \left| \frac{x^2-5x+4}{x^2-4} \right| \geq 1$$

$$f) \frac{x^2-|x|-12}{x-3} \geq 2x$$

Odp. a) $x \in (-8, 1) \cup (1, 10)$ b) $x \in (0, 2)$ c) $x \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

d) $x \in (-11, -4) \cup \left(-4, -1\frac{2}{3}\right)$ e) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup \left(1\frac{3}{5}, 2\right) \cup \left(2, 2\frac{1}{2}\right)$

f) $x \in (-\infty, 3)$

1.113. Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru a , $a \in \mathbf{R}$, dla których układ równań
$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1 \\ -2x + 2ay = -1 \end{cases}$$
 jest oznaczony i spełnia go para (x, y) taka, że $\frac{x}{y} \geq 0$.

Odp. $a \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$

1.114. Dla jakich wartości parametru k , $k \in \mathbf{R}$, równanie $(k-1)x^2 + 2(k+1)x + k - 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania ujemne?

Odp. $k \in (2, +\infty)$

1.115. Dla jakich wartości parametru m , gdzie $m \in \mathbf{R}$, zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{(m-2)x^2 + x + m - 1}{-3x^2 + 2x - 5} > 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych?

Odp. $m \in \left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{2}}{2}\right)$

Dowodzenie z zastosowaniem średniej arytmetycznej, średniej geometrycznej i średniej kwadratowej kilku liczb

D 1.116. Wykaż, że jeśli suma dodatnich liczb a i b jest równa 3, to $a \cdot b \leq 2\frac{1}{4}$.

Odp. *wskazówka:* Skorzystaj z zależności pomiędzy Średnią arytmetyczną i średnią geometryczną dodatnich liczb a i b .

D 1.117. Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie oraz $9x + y + 3z = 18$, to $8 - xyz \geq 0$.

Odp. *wskazówka:* Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną trzech liczb dodatnich $9x, y, 3z$.