

D 1.125. Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie oraz $xy = 9$,
to $(x+y) \cdot (y+z) \geq (z+3)^2$.

D 1.126. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c, d są dodatnie,
to $\frac{2a+c}{b} + \frac{b+5d}{c} + \frac{2bd+5ac}{ad} \geq 16$.

D 1.127. Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie,
to $5 \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{6(a+b)^2 - 12ab}{ab} \geq 22$.

D 1.128. Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie, to
 $xy(3x+2y-4z) + yz(y+3z-4x) + xz(x+2z-4y) \geq 0$.

Odp. *wskazówka:* Wyłącz iloczyn xyz poza nawias.

D 1.129. Wykaż, że jeśli dodatnie liczby a i b spełniają nierówność $a + b \geq 1$,
to $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

Odp. *wskazówka:* Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią kwadratową i średnią arytmetyczną dwóch liczb dodatnich.

D 1.130. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie,
to $\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} \geq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right)$.

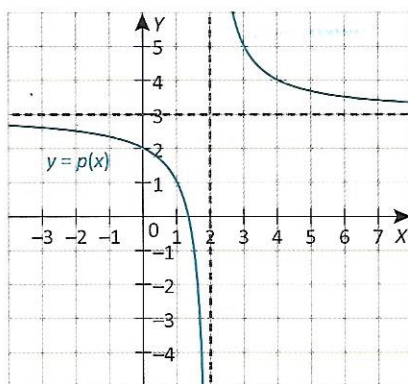
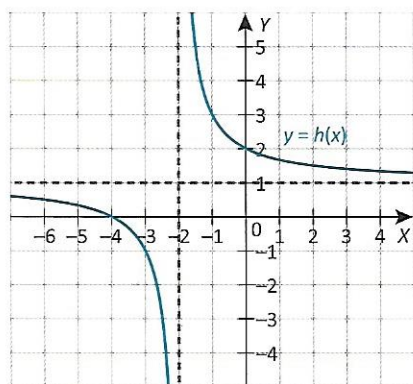
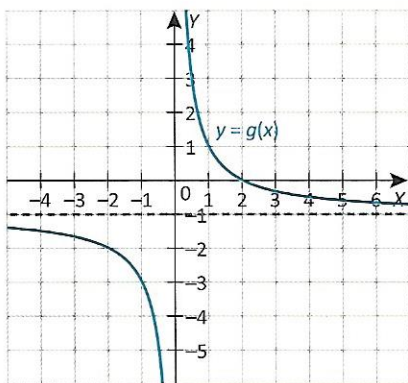
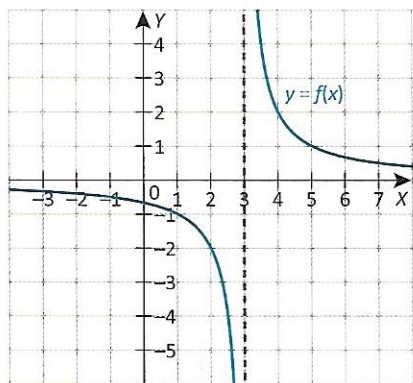
Odp. *wskazówka:* Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną dwóch liczb dodatnich.

Funkcja homograficzna

1.81. **1.131.** Wykres proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{2}{x}$ przesunięto o pewien wektor \vec{u} i otrzymano wykres funkcji, przedstawiony na poniższym rysunku.

- Podaj współrzędne wektora \vec{u} .
- Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymano.

- c) Podaj dziedzinę i zbiór wartości otrzymanej funkcji.
 d) Oblicz miejsce zerowe tej funkcji (jeśli istnieje).
 e) Odczytaj z rysunku zbiór wszystkich argumentów, dla których otrzymana funkcja przyjmuje wartości ujemne.



- Odp. I. a) $\vec{u} = [3, 0]$ b) $f(x) = \frac{2}{x-3}$ c) $D = \mathbf{R} - \{3\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{0\}$ d) funkcja f nie ma miejsc zerowych e) $x \in (-\infty, 3)$
- II. a) $\vec{u} = [0, -1]$ b) $g(x) = \frac{2}{x} - 1$ c) $D = \mathbf{R} - \{0\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{-1\}$ d) 2
 e) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- III. a) $\vec{u} = [-2, 1]$ b) $h(x) = \frac{2}{x+2} + 1$ c) $D = \mathbf{R} - \{-2\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{1\}$ d) -4
 e) $x \in (-4, -2)$
- IV. a) $\vec{u} = [2, 3]$ b) $p(x) = \frac{2}{x-2} + 3$ c) $D = \mathbf{R} - \{2\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{3\}$ d) $1\frac{1}{3}$
 e) $x \in \left(1\frac{1}{3}, 2\right)$

- 1.82. **1.132.** Wykres funkcji $y = \frac{-4}{x}$, gdzie $x \neq 0$, przesunięto równoległe o wektor $\vec{v} = [0, 2]$ i otrzymano wykres funkcji f .
- Napisz wzór funkcji f .
 - Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f .
 - Wyznacz argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość równą -2 .
 - Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $\sqrt{3} - 1$.

Odp. a) $f(x) = \frac{-4}{x} + 2$ b) $D = \mathbf{R} - \{0\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{2\}$ c) 1 d) $-2\sqrt{3}$

- 1.83. **1.133.** Wykres funkcji $y = \frac{3}{x}$, gdzie $x \neq 0$, przesunięto równoległe o wektor $\vec{u} = [2, -4]$ i otrzymano wykres funkcji g .
- Napisz wzór funkcji g i podaj dziedzinę tej funkcji.
 - Podaj współrzędne punktu, który jest środkiem symetrii wykresu funkcji g .
 - Oblicz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji g z osiami układu współrzędnych.
 - Naszkiecuj wykres funkcji g i omów własności tej funkcji.

Odp. a) $g(x) = \frac{3}{x-2} - 4$, $D = \mathbf{R} - \{2\}$ b) $(2, -4)$ c) $\left(2\frac{3}{4}, 0\right)$, $\left(0, -5\frac{1}{2}\right)$

- 1.84. **1.134.** Wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$, przesunięto równoległe o wektor $\vec{v} = [-4, 3]$ i otrzymano wykres funkcji h .
- Napisz wzór funkcji h .
 - Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji h .
 - Sprawdź, czy do wykresu funkcji h należy punkt $A\left(-9, 2\frac{4}{5}\right)$.
 - Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji h i wykresu funkcji liniowej $y = x + 7$.

Odp. a) $h(x) = \frac{1}{x+4} + 3$ b) $D = \mathbf{R} - \{-4\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{3\}$ c) tak d) $(-3, 4)$, $(-5, 2)$

- 1.85. **1.135.** Wykres funkcji $y = \frac{-3}{x}$ przesunięto równoległe o pewien wektor i otrzymano wykres funkcji g , którego środkiem symetrii jest punkt $S(2, -1)$.

- a) Napisz wzór funkcji g w postaci ilorazu dwóch wielomianów stopnia pierwszego. Podaj dziedzinę tej funkcji.
b) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji g i osi OY .

Odp. a) $g(x) = \frac{-x-1}{x-2}$, $x \in \mathbf{R} - \{2\}$ b) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

- 1.86. **1.136.** Wykres funkcji g otrzymamy, przesuając równolegle wykres funkcji

$y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, o wektor \vec{u} . Oblicz a i współrzędne wektora \vec{u} .

a) $g(x) = \frac{x-4}{x+1}$ b) $g(x) = \frac{3x+8}{x+2}$ c) $g(x) = \frac{-2x+1}{x-1}$ d) $g(x) = \frac{5x-6}{-x-2}$

Odp. a) $a = -5$, $\vec{u} = [-1, 1]$ b) $a = 2$, $\vec{u} = [-2, 3]$ c) $a = -3$, $\vec{u} = [1, -2]$ d) $a = 16$,
 $\vec{u} = [-2, -5]$

- 1.87. **1.137.** Naszkicuj w osobnych układach współrzędnych wykresy funkcji:

$f(x) = \frac{x}{x-4}$, $g(x) = \frac{2x+4}{x+2}$, $h(x) = \frac{x+3}{x+2}$. Która z funkcji f , g , h nie jest funkcją homograficzną?

Odp. I. $f(x) = \frac{4}{x-4} + 1$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{4\}$ Funkcja f jest funkcją homograficzną.

II. $g(x) = 2$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$ Funkcja g nie jest funkcją homograficzną.

III. $h(x) = \frac{1}{x+2} + 1$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$ Funkcja h jest funkcją homograficzną.

- 1.88. **1.138.** Dany jest wzór funkcji homograficznej f . Podaj dziedzinę, zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{4}{x+2}$ b) $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ c) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{x+1}{x+4}$

Odp. a) $D = \mathbf{R} - \{-2\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{0\}$; funkcja jest malejąca w przedziałach $(-\infty, -2)$, $(-2, +\infty)$ b) $D = \mathbf{R} - \{0\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{2\}$; funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ c) $D = \mathbf{R} - \{1\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{1\}$; funkcja jest malejąca w przedziałach $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ d) $D = \mathbf{R} - \{-4\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{1\}$; funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, -4)$, $(-4, +\infty)$.

- 1.89. **1.139.** Dany jest wzór funkcji homograficznej f . Wyznacz argument, dla którego ta funkcja przyjmuje wartość w .

a) $f(x) = \frac{2x-5}{9x+27}$, $w = -5$,

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $w = 2 + \sqrt{3}$

Odp. a) $\frac{-130}{47}$ b) $\sqrt{3}$

- 1.90. **1.140.** Funkcja homograficzna $f(x) = \frac{2x+b}{x+4}$, gdzie $x \in \mathbb{R} - \{-4\}$, dla argumentu -3 przyjmuje wartość 5. Oblicz współczynnik b i naszkicuj wykres funkcji f .

Odp. $b = 11$, $f(x) = \frac{3}{x+4} + 2$

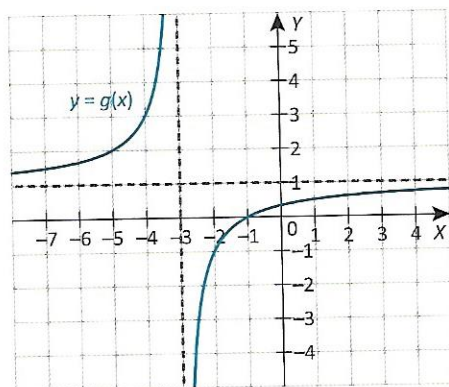
- 1.91. **1.141.** Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji homograficznej

$$g(x) = \frac{x+b}{x+c}, \text{ gdzie } x \neq -c. \text{ Miejscem}$$

zerowym funkcji g jest liczba -1 .

- a) Oblicz współczynniki b i c .
 b) Rozwiąż graficznie równanie
 $g(x) = -x - 1$.

Odp. a) $b = 1$, $c = 3$ b) $x \in \{-4, -1\}$



- 1.92. **1.142.** Wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax-10}{x+b}$, gdzie $x \neq -b$, przecina

oś OY w punkcie o rzędnej $-3\frac{1}{3}$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba $-2\frac{1}{2}$.

- a) Wyznacz wartości współczynników a i b .
 b) Naszkicuj wykres funkcji f .
 c) Odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.

Odp. a) $a = -4$, $b = 3$ c) $(-\infty, -3) \cup \left[-2\frac{1}{2}, +\infty\right)$

- 1.93. **1.143.** Miejscem zerowym funkcji homograficznej $f(x) = \frac{a-x}{x+b}$ jest liczba 3. Funkcja f jest malejąca w przedziałach: $(-\infty, -8)$, $(-8, +\infty)$.

- a) Oblicz wartości współczynników a i b .

b) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja f i funkcja $h(x) = \frac{-2x+6}{x+9}$ przyjmują tę samą wartość.

Odp. a) $a = 3, b = 8$ b) $x \in \{-7, 3\}$

1.94. **1.144.** Dane są funkcje: $f(x) = \frac{2}{x-3}$, gdzie $x \neq 3$ oraz $g(x) = \frac{-x-2}{x}$, gdzie $x \neq 0$.

- a) Naszkicuj wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych.
b) Oblicz współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji f i g .

Odp. b) $(2, -2), \left(-3, \frac{-1}{3}\right)$

1.95. **1.145.** Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji homograficznej f i wykresu funkcji kwadratowej g . Naszkicuj wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych.

a) $f(x) = \frac{-2x}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$ oraz $g(x) = -x^2$

b) $f(x) = \frac{3x+10}{x+2}$, gdzie $x \neq -2$ oraz $g(x) = (x+1)^2 - 5$

Odp. a) $(-2, -4), (0, 0), (1, -1)$ b) $(2, 4), (-3, -1)$

Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

D 1.146. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja homograficzna

a) $f(x) = -1 - \frac{3}{x+2}$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, -2), (-2, +\infty)$

b) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ jest malejąca w przedziałach $(-\infty, -3), (-3, +\infty)$

c) $f(x) = \frac{x-6}{x-4}$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 4), (4, +\infty)$.

D 1.147. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja homograficzna h jest różnowartościowa.

a) $h(x) = 6 - \frac{7}{x+1}, x \in \mathbf{R} - \{-1\}$

b) $h(x) = \frac{2-3x}{4x+5}, x \in \left\{-1\frac{1}{4}\right\}$