b) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja f i funkcja $h(x)=\frac{-2x+6}{x+9}$ przyjmują tę samą wartość.

Odp. a) $a=3$, $b=8$ b) $x \in \{-7, 3\}$

1.94. **1.144.** Dane są funkcje: $f(x)=\frac{2}{x-3}$, gdzie $x \neq 3$ oraz $g(x)=\frac{-x-2}{x}$, gdzie $x \neq 0$.

a) Naszkicuj wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych.

b) Oblicz współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji f i g.

Odp. b) $(2, -2)$, $\left(-3, \frac{-1}{3}\right)$

1.95. **1.145.** Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji homograficznej f i wykresu funkcji kwadratowej g. Naszkicuj wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych.

a) $f(x)=\frac{-2x}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$ oraz $g(x)=-x^2$

b) $f(x)=\frac{3x+10}{x+2}$, gdzie $x \neq -2$ oraz $g(x)=(x+1)^2-5$

Odp. a) $(-2, -4)$, $(0, 0)$, $(1, -1)$ b) $(2, 4)$, $(-3, -1)$

Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

D **1.146.** Wykaż na podstawie definicji, że funkcja homograficzna

a) $f(x)=-1-\frac{3}{x+2}$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, -2)$, $(-2, +\infty)$

b) $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ jest malejąca w przedziałach $(-\infty, -3)$, $(-3, +\infty)$

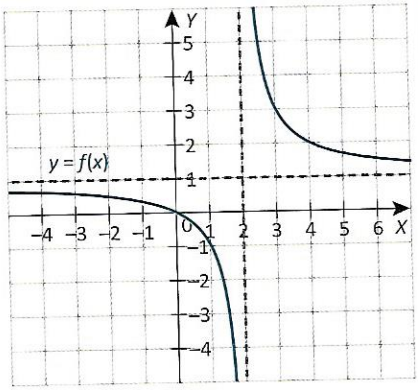
c) $f(x)=\frac{x-6}{x-4}$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 4)$, $(4, +\infty)$.

D **1.147.** Wykaż na podstawie definicji, że funkcja homograficzna h jest różnowartościowa.

a) $h(x)=6-\frac{7}{x+1}$, $x \in \mathbf{R}-\{-1\}$

b) $h(x)=\frac{2-3x}{4x+5}$, $x \in \left\{-1\frac{1}{4}\right\}$

1.148. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji homograficznej $f(x)=\dfrac{ax+1}{cx+d}$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba –1. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$.



a) Wyznacz współczynniki a, c, d.

b) Rozwiąż równanie $2 \cdot f(x) + (x-1)^2 = 4$.

Odp. $a = 1$, $c = 1$, $d = -2$; $x = -1$

1.149. Do wykresu funkcji homograficznej $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ należy punkt $P(-6,\ 3)$. Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba $1\frac{1}{2}$.

a) Oblicz współczynniki a, b, c.

b) Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje większe wartości niż funkcja $g(x)=\dfrac{5x+3}{4x+7}$.

Odp. a) $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$ b) $x \in (-\infty,-2) \cup \left(-1\frac{3}{4},-1\right) \cup (4,+\infty)$

1.150. Z podanego równania wyznacz y jako funkcję zmiennej x. Następnie podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

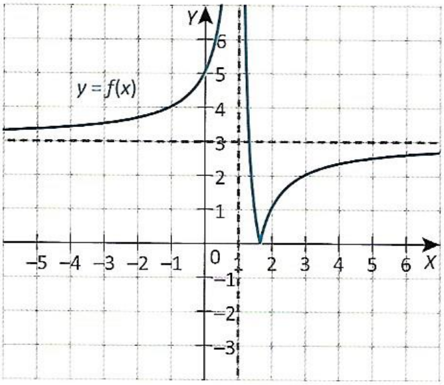
a) $xy - x - 3y + 1 = 0$ b) $\dfrac{1}{y-1}+\dfrac{1}{x+1}=1$ c) $\dfrac{1}{y+2}=1+\dfrac{1}{x+1}$

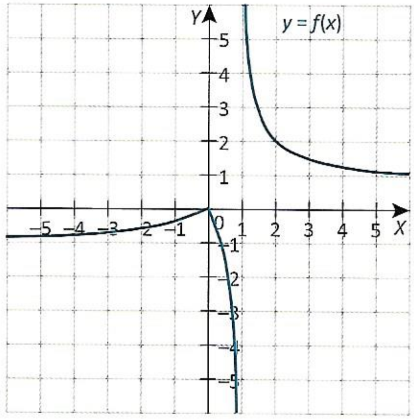
Odp. a) $y=\dfrac{2}{x-3}+1$, $D = \mathbf{R} - \{3\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{1\}$ b) $y=\dfrac{1}{x}+2$, $D = \mathbf{R} - \{-1, 0\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{1, 2\}$ c) $y=\dfrac{-1}{x+2}-1$, $D = \mathbf{R} - \{-2, -1\}$, $ZW = \mathbf{R} - \{-2, -1\}$

1.151. Naszkicuj wykres funkcji f i omów jej własności.

a) $f(x)=\left|\dfrac{5-3x}{x-1}\right|$ b) $f(x)=\dfrac{|x|}{x-1}$ c) $f(x)=\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$

Odp.

a) 

b) 

c) *wskazówka:* Zauważ, że funkcja f jest parzysta. Naszkicuj najpierw wykres funkcji $y=\frac{x+1}{x-1}$, gdzie $x>0$

1.152. Rozwiąż dane równanie, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $|x|+\frac{2}{x+1}=0$

b) $\frac{x^2-1}{2}=\frac{4}{|x|-2}$.

Odp. a) $x=-2$ b) $x \in \{-3, 3\}$

1.153. Rozwiąż graficznie daną nierówność.

a) $\left|\frac{4}{x}-2\right| \leqslant x^2-2x+3$

b) $5-2|x-4|>\frac{x+1}{x-3}$.

Odp. a) $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ b) $x \in (1, 3) \cup (4, 5)$

1.154. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające dane równanie.

a) $y=\frac{2x-11}{x-3}$

b) $\frac{4}{x-6}=y-1$

c) $xy+3x-2y=9$

d) $\frac{2}{x-2}+\frac{1}{y+1}=1$

Odp. a) $(-2, 3)$, $(2, 7)$, $(4, -3)$, $(8, 1)$ b) $(2, 0)$, $(4, -1)$, $(5, -3)$, $(7, 5)$, $(8, 3)$, $(10, 2)$
c) $(-1, -4)$, $(1, -6)$, $(3, 0)$, $(5, -2)$ d) $(-3, -2)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$

D **1.155.** Wykaż, że istnieją tylko trzy pary liczb naturalnych (a, b), które spełniają równość $ab-4(a-b)=0$.

1.156. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{3-x}{x+2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{-2\}$. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem $g(x)=\frac{|f(x)|}{f(x)}$.

Odp. *wskazówka:* $g(x)=\begin{cases} 1, \text{ jeśli } x \in (-2,3) \\ -1, \text{ jeśli } x \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty) \end{cases}$

1.157. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\left|\frac{-2x+1}{x+1}\right|$. Następnie ustal, dla jakich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, równanie $\left|\frac{-2x+1}{x+1}\right|=\frac{m+3}{m+2}$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

Odp. $m \in (-1, +\infty)$

1.158. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}-\{0\}$, dla których równanie $3+\frac{4}{|x|-2}=\frac{k+3}{k}$ ma rozwiązanie.

Odp. $k \in (-\infty, 0) \cup \left(0, 1\frac{1}{2}\right)$

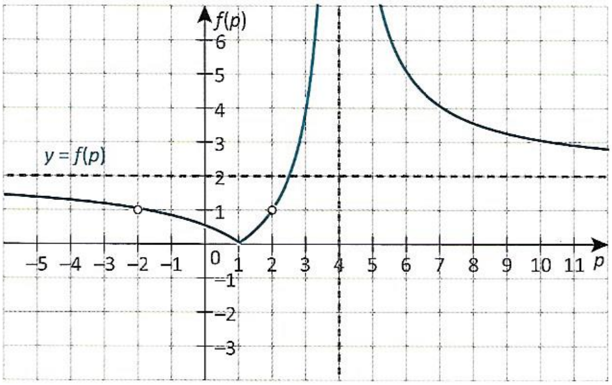
1.159. Dany jest układ równań $\begin{cases} px+2y=1 \\ 2x+py=2 \end{cases}$ z niewiadomymi x, y i z parametrem p, $p \in \boldsymbol{R}$.

a) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których ten układ ma rozwiązanie.

b) Naszkicuj wykres funkcji $f(p)=\left|\frac{y}{x}\right|$, gdzie para (x, y) jest rozwiązaniem tego układu równań i $x \neq 0$.

Odp. a) $p \in \boldsymbol{R}-\{-2, 2\}$; wówczas układ równań ma jedno rozwiązanie $\begin{cases} x=\frac{p-4}{p^2-4} \\ y=\frac{2p-2}{p^2-4} \end{cases}$

b) $f(p)=\left|\frac{6}{p-4}+2\right|$, gdzie $p \in \boldsymbol{R}-\{-2, 2, 4\}$



1.160. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których funkcja $f(x)=\frac{5x+m^2+2m-18}{x-2}$ jest funkcją homograficzną, malejącą w przedziałach $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$.

Odp. $m \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

1.161. Naszkicuj wykres funkcji $g(m)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, gdzie x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania kwadratowego $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$.

Odp. $g(m)=\frac{8}{m-2}+4$, gdzie $m \in \left(-\infty,-3\frac{1}{2}\right) \cup (1,2) \cup (2,5) \cup (5,+\infty)$