Funkcje wymierne

1.162. Określ dziedzinę funkcji wymiernej f.

a) $f(x)=\frac{8x+5}{x^3-5x^2+6x}$

b) $f(x)=\frac{2x^5}{x^4+3x^2-4}$

c) $f(x)=\frac{x^2-7}{x^3+3x^2+3x+1}$

d) $f(x)=\frac{2}{x^3-4x^2-4x+16}$

e) $f(x)=\frac{x^3-2x}{x^3-9x^2+8}$

f) $f(x)=\frac{x^4+3}{x^3+3x^2-9x+5}$

Odp. a) $\boldsymbol{R}-\{0, 2, 3\}$ b) $\boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$ c) $\boldsymbol{R}-\{-1\}$ d) $\boldsymbol{R}-\{-2, 2, 4\}$
e) $R-\{4-2\sqrt{6}, 1, 4+2\sqrt{6}\}$ f) $\boldsymbol{R}-\{-5, 1\}$

1.163. Podaj wzór przykładowej funkcji wymiernej, której dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{-3, 3\}$ i która dla argumentów -2 i 2 przyjmuje wartość 1.

1.164. Podaj wzór przykładowej funkcji wymiernej, której dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{-1, 2, 3\}$ i której wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 5)$.

1.165. Podaj wzór przykładowej funkcji wymiernej określonej w zbiorze $\boldsymbol{R}-\{0\}$, która jest parzysta i dla argumentu 1 przyjmuje wartość 3.

1.166. Podaj wzór przykładowej funkcji wymiernej określonej w zbiorze $\boldsymbol{R}-\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, która jest nieparzysta oraz dla argumentu -2 przyjmuje wartość -8.

D **1.167.** Dana jest funkcja wymierna $f(x)=\frac{2x^2-5x-3}{(x-3)^2}$. Wykaż, że:

a) funkcja f jest różnowartościowa

b) liczba 2 nie należy do zbioru wartości funkcji f.

Odp. *wskazówka:* Zauważ, że wzór funkcji f można zapisać w postaci $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$.

1.168. Funkcja wymierna $h(x)=\frac{x^3+2x^2-9x+6k}{x+3k}$ dla argumentu 1 przyjmuje wartość 3.

a) Oblicz k.

b) Podaj miejsca zerowe funkcji h.

c) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja h przyjmuje wartości nieujemne.

Odp. a) $k=-3$ b) $-3, -2, 3$ c) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle -2, 3\rangle \cup (9, +\infty)$

1.169. Liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji wymiernej $f(x)=\dfrac{x^3+ax+6}{x-1}$.

a) Oblicz współczynnik a.

b) Wyznacz pozostałe miejsca zerowe funkcji f.

c) Naszkicuj wykres funkcji f.

d) Podaj przedziały monotoniczności funkcji f.

Odp. a) $a=-7$ b) $-3, 2$ c) wykresem funkcji f jest parabola bez punktu $(1, -4)$

d) funkcja f jest malejąca w przedziale $\left(-\infty - \dfrac{1}{2}\right)$, funkcja f jest rosnąca w przedziałach $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $(1, +\infty)$

1.170. Dana jest funkcja wymierna $h(x)=\dfrac{4}{(x-1)^2}$, gdzie $x \neq 1$.

a) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja h przyjmuje wartości większe od 1.

D b) Wykaż na podstawie definicji, że funkcja h jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 1)$ i malejąca w przedziale $(1, +\infty)$.

Odp. a) $x \in (-1, 1) \cup (1, 3)$

1.171. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których dziedziną danej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych.

a) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{2x^2-(m+3)x+8}$

b) $g(x)=\dfrac{mx-3}{(m-1)x^2+(1-m)x+6}$

c) $p(x)=\dfrac{3x^2+2m}{(m^2-4)x^2+(m+2)x+1}$

d) $h(x)=\dfrac{1}{mx^4+(m+1)x^2+2m+2}$

Odp. a) $m \in (-11, 5)$ b) $m \in \langle 1, 25)$ c) $m \in (-\infty, -2\rangle \cup \left(3\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$

d) $m \in (-\infty, -1) \cup \langle 0, +\infty)$

1.172. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja wymierna $h(x)=\dfrac{4x^2-8x+m}{x+1}$ ma tylko jedno miejsce zerowe. Dla wyznaczonych wartości m, oblicz miejsce zerowe funkcji h.

Odp. $m \in \{-12, 4\}$ Jeśli $m = -12$, to miejscem zerowym funkcji h jest liczba 3. Jeśli $m = 4$, to miejscem zerowym funkcji h jest liczba 1.

1.173. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbb{R}$, dla których funkcja wymierna $g(x)=\dfrac{4x^2-2(p-3)x+p}{2x^2+x-3}$ ma dwa miejsca zerowe.

Odp. $p \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (9, 10) \cup (10, +\infty)$

1.174. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbb{R}$, dla których funkcja wymierna $f(x)=\dfrac{x^2-2kx}{x^3+2x^2-8x}$ nie ma miejsc zerowych. Dla wyznaczonych wartości k podaj zbiór wartości funkcji f.

Odp. $k \in \{-2, 1\}$; Jeśli $k = -2$, to $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} - \{-4, 0, 2\}$,

$ZW=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{6}, 0\right\}$. Jeśli $k = 1$, to $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$, gdzie $x \in \mathbb{R} - \{-4, 0, 2\}$,

$ZW=\mathbb{R}-\left\{0, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}\right\}$

1.175. Wyznacz największą wartość funkcji wymiernej f oraz argument, dla którego ta wartość jest przyjmowana.

a) $f(x)=\dfrac{40}{x^2+4x+24}$

b) $f(x)=\dfrac{10x^2+4x+6}{5x^2+2x+1}$

Odp. a) największa wartość 2 – dla argumentu –2 b) największa wartość 7 – dla argumentu $-\dfrac{1}{5}$

1.176. Wyznacz zbiór wartości funkcji wymiernej $g(x)=\dfrac{2x^2+x}{2x^2+x+3}$.

Odp. $ZW=\left\langle \dfrac{-1}{23}, 1\right)$

D 1.177. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, gdzie $x\in \mathbf{R}$. Wykaż, że:

a) w przedziałach $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ funkcja f jest malejąca

b) zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1, 1\rangle$.

1.178. Wyznacz zbiór wartości funkcji wymiernej $f(x)=2-\frac{10x}{x^2+25}$.

Odp. $ZW=\langle 1, 3\rangle$

D 1.179. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x:

a) $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$

b) $2\leqslant\frac{3x^2-4x+12}{x^2+4}\leqslant 4$.

D 1.180. Dana jest funkcja wymierna $f(x)=\frac{x^2+1}{2x}$, gdzie $x\in \mathbf{R}-\{0\}$. Wykaż, że jeśli funkcja f dla dwóch różnych argumentów przyjmuje tę samą wartość, to jeden z tych argumentów jest odwrotnością drugiego.

Test sprawdzający do rozdziału 1.

1. Dziedziną ułamka algebraicznego $\frac{3x}{x(x-2)}$ jest zbiór:

A. $\mathbf{R}-\{0\}$ B. $\mathbf{R}-\{2\}$ C. $\mathbf{R}-\{-2\}$ $\boxed{\text{D.}}$ $\mathbf{R}-\{0, 2\}$.

2. Jeśli $a=2-\sqrt{3}$, to liczba $\frac{a-2}{a+1}$ jest równa:

$\boxed{\text{A.}}$ $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$ D. $1-\sqrt{3}$.

3. Po skróceniu ułamka $\frac{2x^2-7x+3}{3-x}$, gdzie $x\neq 3$, otrzymamy wyrażenie:

A. $-2x^2+7x$ $\boxed{\text{B.}}$ $1-2x$ C. $2x-1$ D. $\frac{1}{2}-x$.

4. Po rozszerzeniu ułamka $\frac{1}{2x-3}$, gdzie $x \neq 1\frac{1}{2}$, otrzymano ułamek, którego mianownik jest wielomianem $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$. Wówczas licznik otrzymanego ułamka jest równy:

A. $2x^3 - 3x^2$ $\boxed{\text{B.}}$ $x^2 + 1$ C. $-3x^2 + 2x$ D. $x^2 - 1$.

5. Suma rozwiązań równania $\frac{(3x+2)(6x-18)(3x+1)}{x^2-9} = 0$ wynosi:

A. 2 B. –15 $\boxed{\text{C.}}$ –1 D. 0.

6. Równanie $\frac{x-5}{x^2+4x} = \frac{1}{x}$

A. ma tylko jedno rozwiązanie B. ma dwa rozwiązania

$\boxed{\text{C.}}$ jest sprzeczne D. jest tożsamościowe.

7. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{5}{x} - 2$ jest zbiór:

A. $\boldsymbol{R} - \{0\}$ B. $\boldsymbol{R} - \{5\}$ C. $\boldsymbol{R} - \{-2\}$ $\boxed{\text{D.}}$ $\boldsymbol{R} - \{-2, 0\}$.

8. Aby otrzymać wykres funkcji homograficznej $y = \frac{3-x}{x+2}$, wystarczy wykres funkcji $f(x) = \frac{5}{x}$ przesunąć równolegle:

$\boxed{\text{A.}}$ o 2 jednostki w lewo i 1 jednostkę w dół

B. o 2 jednostki w prawo i 1 jednostkę w górę

C. o 2 jednostki w lewo i 3 jednostki w górę

D. o 2 jednostki w prawo i 3 jednostki w dół.

9. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$, gdzie $x \neq 3$. Wskaż zdanie <u>fałszywe</u>.

A. Miejsce zerowe funkcji f jest liczbą ujemną.

$\boxed{\text{B.}}$ Funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$.

C. Środkiem symetrii wykresu funkcji f jest punkt $(3, 1)$.

D. Wykres funkcji przecina oś OY poniżej punktu $O(0, 0)$.

10 Ile liczb całkowitych należy do dziedziny funkcji homograficznej $f(x) = 2 - \frac{5}{x+3}$, dla których funkcja f przyjmuje wartości, będące liczbami pierwszymi?

A. jedna $\boxed{\text{B.}}$ dwie C. trzy D. cztery