

## Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

**11.** Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

$$\text{a) } \frac{4x-6}{3x} + \left[ x - \frac{4(x-1)}{x} \right] : (2-x) \quad \text{b) } \left( \frac{5}{x-4} + \frac{4}{4-x} \right) \cdot \left( \frac{x^2+16}{2x} - 4 \right) + 2 : \frac{x^2}{x-1}$$

$$\text{Odp. a) } \frac{1}{3}, x \in \mathbf{R} - \{0, 2\} \quad \text{b) } \frac{x^2-4}{2x^2}, x \in \mathbf{R} - \{0, 1, 4\}$$

**12.** Rozwiąż dane równanie.

$$\text{a) } \frac{12x^3 + 4x^2 - 3x - 1}{2x-1} = 0$$

$$\text{b) } (x-2)^2 = \frac{8}{2-x}$$

$$\text{c) } \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{3x}{x^3-1}$$

$$\text{d) } \frac{x}{x+1} + \frac{3}{2} = \frac{2}{x}$$

$$\text{e) } \frac{x+3}{x+2} + 1 = \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x-3}{2-x}$$

$$\text{f) } \frac{1}{6}x^2 - \frac{1-2x}{x-6} = \frac{x}{6x-36}$$

$$\text{Odp. a) } x \in \left\{ \frac{-1}{2}, \frac{-1}{3} \right\} \quad \text{b) } x = 0 \quad \text{c) } x = 2 \quad \text{d) } x \in \left\{ \frac{-4}{5}, 1 \right\} \quad \text{e) Równanie sprzeczne}$$

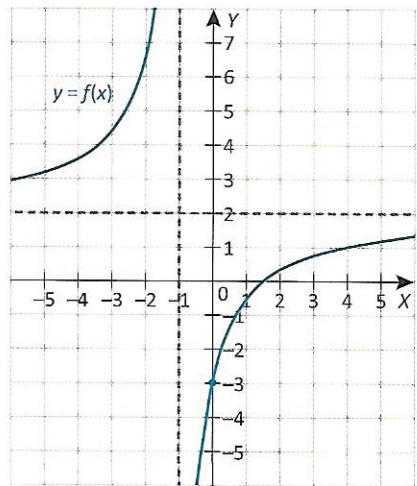
$$\text{f) } x \in \{1, 2, 3\}$$

**13.** Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji homograficznej

$$f(x) = \frac{a}{x+b} + c, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } x \neq -b. \text{ Wykres przecina oś } OY \text{ w punkcie } (0, -3).$$

Wykres przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0, -3)$ .

- Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $f$ .
- Wyznacz współczynniki  $a, b, c$ .
- Oblicz miejsce zerowe funkcji  $f$ .
- Podaj zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości nieujemne.



$$\text{Odp. a) } D = \mathbf{R} - \{-1\}, ZW = \mathbf{R} - \{2\} \quad \text{b) } a = -5, b = 1, c = 2 \quad \text{c) } 1 \frac{1}{2}$$

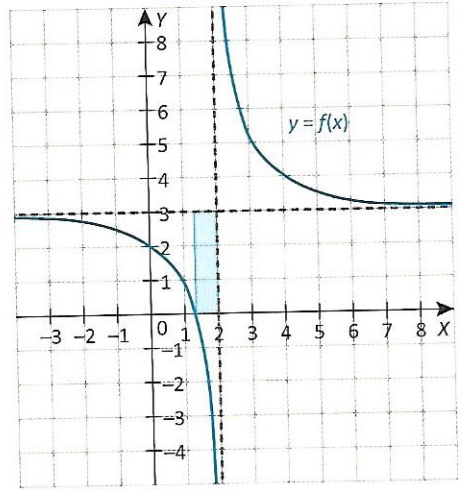
$$\text{d) } (-\infty, -1) \cup \left( 1 \frac{1}{2}, +\infty \right)$$

**14.** Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-2}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} - \{2\}. \text{ Oblicz}$$

pole prostokąta zaznaczonego na tym rysunku wiedząc, że jeden z jego wierzchołków należy do wykresu funkcji  $f$ , a pozostałe odpowiednio do prostych  $x = 2$ ,  $y = 3$ .

Odp.  $P = 2$



**15.** Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji homograficznej

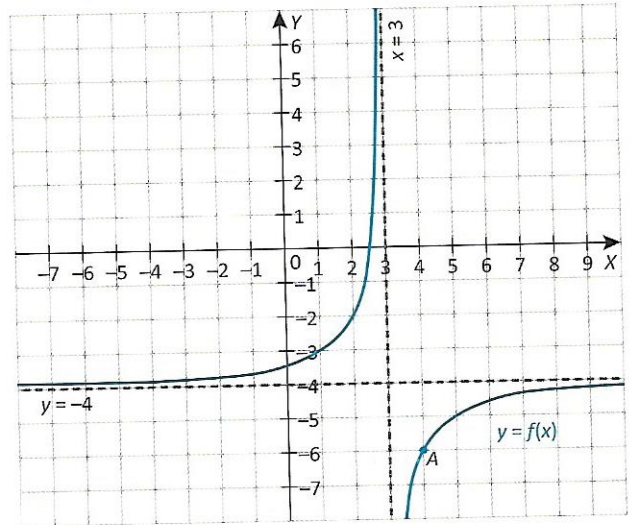
$$f(x) = \frac{-4x+b}{x+c}, \text{ gdzie } x \neq -c.$$

Wiedząc, że do wykresu funkcji  $f$  należy punkt  $A(4, -6)$ :

- wyznacz współczynniki  $b, c$ ,
- ustal znak liczby  $|f(-\pi)| + f(\pi)$ .

- sprawdź, czy punkt  $B(1-\sqrt{2}, -2-\sqrt{2})$

należy do wykresu funkcji  $f$ .



Odp. a)  $b = 10, c = -3$  b)  $|f(-\pi)| + f(\pi) < 0$  c) tak

**16.** Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykres funkcji homograficznej

$f(x) = \frac{2x+11}{x+4}$ , gdzie  $x \in \mathbb{R} - \{-4\}$ , oraz wykres funkcji kwadratowej

$g(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 3$ . Następnie oblicz współrzędne punktów wspólnych tych wykresów.

---

Odp.  $(-5, -1), (-1, 3), \left(0, 2\frac{3}{4}\right)$

**17.** Wyznacz wszystkie liczby całkowite, dla których funkcja homograficzna  $f(x) = 1 - \frac{8}{x+1}$ , gdzie  $x \neq -1$ , przyjmuje wartości będące liczbami pierwszymi.

---

Odp.  $-3, -5, -9$

**D 18.** Wykaż, że jeśli liczby  $a$  i  $b$  są dodatnie oraz  $\frac{3a-b}{2a+b} = 1$ , to  $\frac{2a+3b}{a+4b} = 1\frac{1}{6}$ .

**D 19.** Wykaż, że jeśli  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  oraz  $a \neq b$ , to wartość wyrażenia  $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) : \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2}{3a-3b}$  jest stała.

---

Odp. 3

**D 20.** Wykaż, że jeśli  $b \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$  oraz  $a - 2b = ab$ , to wartość wyrażenia  $\frac{b}{a} : \left(1 - \frac{b+1}{2}\right)$  jest stała.

---

Odp. 1

**D 21.** Wykaż, że jeśli  $a \neq -b$ ,  $a \neq b$  oraz  $b \neq 2a$ , to

$$\left[ \left( \frac{4}{a+b} + \frac{4a}{a^3+b^3} \cdot \frac{a^2-ab+b^2}{a-b} \right) : \frac{2a-b}{a^2+2ab+b^2} \right] \cdot \frac{a-b}{4} = a+b.$$

**22.** Maszynistka przepisywała rękopis książki liczący 240 stron – dziennie przepisując tę samą liczbę stron. Gdyby codziennie przepisywała o 10 stron więcej, to skończyłaby tę pracę o 2 dni wcześniej. W ciągu ilu dni maszynistka przepisała cały rękopis?

---

Odp. w ciągu 8 dni

**23.** Zakład stolarski otrzymał zamówienie na wyprodukowanie 192 krzesel. Dziennie wytwarzano tyle samo krzesel. Ale po wykonaniu 25% zamówienia usprawniono produkcję i wówczas zakład zaczął produkować o 2 krzesła dziennie więcej. Dzięki

temu umowę zrealizowano o 1 dzień wcześniej niż zaplanowano. W ciągu ilu dni zakład wyprodukował krzesła?

Odp. w ciągu 11 dni

**24.** Zbiornik może być napełniony wodą z dwóch kranów. Pierwszy kran napełnia pusty zbiornik w czasie o 2 godziny krótszym niż drugi kran. Jeśli otworzymy dwa krany jednocześnie, to zbiornik zostanie napełniony w ciągu 2 godzin i 24 minut. Oblicz, ile czasu potrzeba, aby napełnić pusty zbiornik tylko przez pierwszy kran?

Odp. 4 godziny

**25.** Z miast  $A$  i  $B$  odległych od siebie o 252 km wyjechały naprzeciw siebie dwa pociągi. Pociąg jadący z miasta  $A$  do miasta  $B$  wyjechał o 20 minut później i jechał z prędkością o 9 km/h większą niż pociąg jadący z miasta  $B$  do miasta  $A$ . Pociągi minęły się na stacji leżącej w połowie drogi między miastami  $A$  i  $B$ . Oblicz, z jakimi średnimi prędkościami jechały te pociągi.

Odp. 63 km/h, 54 km/h

**D 26.** Wykaż na podstawie definicji, że funkcja homograficzna  $f(x) = \frac{14-3x}{x-4}$  jest malejąca w przedziałach  $(-\infty, 4)$ ,  $(4, +\infty)$ .

**27.** Funkcja  $f(x) = \frac{7x}{x+a}$ , gdzie  $x \neq -a$ , jest rosnąca w przedziałach  $(-\infty, -2)$ ,

$(-2, +\infty)$ . Funkcja  $g(x) = \frac{2x^2}{b-x}$ , gdzie  $x \neq b$ , przyjmuje wartości ujemne wtedy

i tylko wtedy, gdy  $x \in (3, +\infty)$ . Wyznacz współczynniki  $a$  i  $b$ . Następnie oblicz współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji  $f$  i  $g$ .

Odp.  $a = 2$ ,  $b = 3$ ; punkty wspólne wykresów funkcji:  $(0, 0)$ ,  $(-7, 9\frac{4}{5})$ ,  $(\frac{1}{2}, 3)$

**D 28.** Dane są funkcje wymierne  $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$  oraz  $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$ , gdzie  $x \neq 0$ . Wykaż, że:

a) funkcja  $f$  jest parzysta, a funkcja  $g$  jest nieparzysta,

b) zbiorem wartości funkcji  $g$  jest suma przedziałów  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

c) jeśli  $a \neq 0$ , to prawdziwa jest równość  $f(a) = [g(a)]^2 - 2$ .



**29.** Rozwiąż równanie:

$$\text{a) } x^2 - 4x - 2 = \frac{15}{x^2 - 4x} \quad \text{b) } \frac{x-2}{x-3} - |x-4| = 2 \quad \text{c) } \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x-5|} = 1.$$

---

Odp. a)  $x \in \{-1, 1, 3, 5\}$  b)  $x = 4$  c)  $x \in \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 2\right\}$

**30.** Rozwiąż nierówność:

$$\text{a) } \frac{x-4}{5-x} \leq \frac{1}{1-x} \quad \text{b) } \left| \frac{x+2}{2x-3} \right| < 3 \quad \text{c) } \frac{|x-1|}{x^2+x-2} \leq 0.$$

---

Odp. a)  $x \in (-\infty, 1) \cup \{3\} \cup (5, +\infty)$  b)  $x \in (-\infty, 1) \cup \left(2\frac{1}{5}, +\infty\right)$  c)  $x \in (-2, 1)$

**D 31.** Wykaż, że jeśli liczby  $a, b, c$  są dodatnie oraz  $a^2 + b^2 + c^2 = 108$ , to  $a + b + c \leq 18$ .

Odp. *wskazówka:* Zastosuj zależność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową trzech liczb dodatnich.

**D 32.** Wykaż, że jeśli  $a > 0$ , to  $a^3 + \frac{48}{a} \geq 32$ .

Odp. *wskazówka:* Zauważ, że  $a^3 + \frac{48}{a} = a^3 + \frac{16}{a} + \frac{16}{a} + \frac{16}{a}$ . Skorzystaj z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną czterech liczb dodatnich.

**33.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbf{R}$ , dla których funkcja wymierna  $f(x) = \frac{(m+1)x-2}{x-m}$  jest funkcją homograficzną, malejącą w przedziałach  $(-\infty, m)$ ,  $(m, +\infty)$ .

---

Odp.  $m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

**34.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbf{R}$ , dla których funkcja  $f(x) = (m+1)x^2 - 2\sqrt{2}x + m+2$  ma dwa różne miejsca zerowe  $x_1, x_2$  takie, że  $x_1x_2 - m \geq 0$ .

---

Odp.  $m \in (-3, -\sqrt{2}) \cup (-1, 0)$

**35.** Dla jakich wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbf{R}$ , zbiorem rozwiązań nierówności wymiernej  $\frac{(k+2)x^2 + x + k+2}{x^2 - (k+5)x + 9} < 0$  jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

Odp.  $k \in \left(-11, -2\frac{1}{2}\right)$ ; *wskazówka:* Zauważ, że dziedziną nierówności jest zbiór  $\mathbf{R}$  tylko wtedy, gdy wyróżnik mianownika jest ujemny. Wówczas mianownik jest dodatni.