

Ciąg arytmetyczny

2.33. **2.35.** Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 5n - 3$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

b) Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

c) Podaj wzór rekurencyjny ciągu (a_n) .

Odp. b) $a_1 = 2, r = 5$ c) $a_n = \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 5, n \geq 1 \end{cases}$

2.34. **2.36.** Dany jest ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \frac{4-7n}{3}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym.

b) Zbadaj monotoniczność tego ciągu.

c) Oblicz $b_{10} + b_{25}$.

Odp. b) malejący c) -79

2.35. **2.37.** W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) dane są $a_1 = -8,5$ i $r = 2,5$.

Oblicz:

a) wyrazy a_6, a_{10} i a_{27}

b) wyraz ogólny ciągu

c) $a_{2n+1} - a_{n+3}$

Odp. a) $a_6 = 4, a_{10} = 14, a_{27} = 56\frac{1}{2}$ b) $a_n = \frac{5}{2}n - 11$ c) $\frac{5}{2}n - 5$

2.36. **2.38.** Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n(n+1)$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

b) Drugi i piąty wyraz ciągu (a_n) są odpowiednio równe pierwszemu i siódmemu wyrazowi nieskończonego ciągu arytmetycznego (b_n) . Wyznacz wyraz ogólny ciągu (b_n) .

Odp. b) $b_n = 4n + 2$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$

2.37. **2.39.** Między liczby 4 i 22 wstaw kolejno pięć liczb tak, aby wraz z danymi liczbami tworzyły rosnący ciąg arytmetyczny.

Odp. 7, 10, 13, 16, 19

2.38. **2.40.** Pierwszy wyraz skończonego ciągu arytmetycznego o różnicy 3,1 wynosi 2,3. Ostatni wyraz tego ciągu jest równy 48,8. Ile wyrazów ma ten ciąg?

Odp. szesnaście

- 2.39. **2.41.** W skończonym ciągu arytmetycznym przedostatni wyraz jest równy 38, a ostatni wynosi 41. Wiedząc, że drugi wyraz tego ciągu jest równy 5, oblicz liczbę wyrazów tego ciągu.

Odp. czternaście

- 2.40. **2.42.** Ciąg arytmetyczny ma siedemnaście wyrazów. Środkowy wyraz ciągu jest równy 8. Wyznacz różnicę tego ciągu wiedząc, że trzeci wyraz ciągu jest równy -22 .

Odp. $r = 5$

- 2.41. **2.43.** Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli:

- a) $a_7 + a_{13} = 14$ i $a_{10} + a_{22} = 10$ b) $a_8 - a_3 = 10$ i $2a_5 + 3a_7 = 37$
 c) $a_3 + a_5 = 24$ i $a_3 \cdot a_5 = 135$ d) $a_9 - a_6 = 21$ i $a_9 \cdot a_6 = 2146$.

Odp. a) $a_1 = 10, r = -\frac{1}{3}$ b) $a_1 = -3, r = 2$ c) $(a_1 = 3, r = 3)$ lub $(a_1 = 21, r = -3)$

d) $(a_1 = 2, r = 7)$ lub $(a_1 = -93, r = 7)$

- 2.42. **2.44.** Oblicz, ile jest liczb naturalnych:

- a) należących do przedziału $\langle 200, 895 \rangle$, które są podzielne przez 4
 b) mniejszych od 300, które nie są podzielne przez 7
 c) należących do przedziału $(10, 400)$, których reszta z dzielenia przez 3 wynosi 2.

Odp. a) 174 b) 257 c) 130

- 2.43. **2.45.** Wykaż że ciąg $\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}, 3, \sqrt{3}+4 \right)$ jest ciągiem arytmetycznym.

- 2.44. **2.46.** Wyznacz liczbę k , dla której ciąg $(3k^2 - 2k + 3, k^2 - k + 1, -2k^2 + k + 5)$ jest ciągiem arytmetycznym. Dla wyznaczonej liczby k podaj ten ciąg.

Odp. $k = -2$ lub $k = 3$; jeśli $k = -2$, to ciąg ma postać $(19, 7, -5)$; jeśli $k = 3$, to ciąg ma postać $(24, 7, -10)$

- 2.45. **2.47.** Wyznacz liczby x, y tak, aby czterowyrazowy ciąg $(12, x, y, 27)$ był ciągiem arytmetycznym.

Odp. $x = 17, y = 22$

- 2.46. **2.48.** Dla jakiej wartości x liczby $x^3, x^2 + 2, 4$ są w danej kolejności odpowiednio pierwszym, trzecim i piątym wyrazem nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) ? Dla znalezionej wartości x napisz wyraz ogólny ciągu (a_n) .

Odp. I. $x = 0; a_n = n - 1, n \in \mathbf{N}_+$ II. $x = 2; a_n = -n + 9, n \in \mathbf{N}_+$; *wskazówka:* Wykaż, że $a_5 + a_1 = 2a_3$.

- 2.47. **2.49.** Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego wiedząc, że te długości ustawione rosnąco tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 2.

Odp. 6, 8, 10

- 2.48. **2.50.** Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 27, suma dwóch ostatnich wyrazów wynosi 105. Wiedząc, że siódmy wyraz ciągu wynosi 30, oblicz:

a) pierwszy wyraz tego ciągu b) liczbę wyrazów tego ciągu.

Odp. a) $a_1 = 12$ b) 15 wyrazów

- 2.49. **2.51.** W skończonym ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_2 = 2$ oraz $a_6 = 22$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Wyznacz liczbę wyrazów ciągu (a_n) wiedząc, że ostatni wyraz wynosi 222.

Odp. $a_1 = -3$; ciąg ma 46 wyrazów

- 2.52.** Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Suma tych liczb jest równa 18, a suma kwadratów liczb skrajnych wynosi 104. Wyznacz te liczby.

Odp. 2, 6, 10

- D 2.53.** Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) , gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, jest rosnącym ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n) , gdzie $b_n = 3 - 2a_n$ jest ciągiem arytmetycznym malejącym.

- D 2.54.** Dany jest malejący ciąg arytmetyczny (c_n) , $n \in \mathbf{N}_+$, oraz funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, gdzie $a < 0$ i $b \in \mathbf{R}$. Wykaż, że ciąg (b_n) , gdzie $b_n = f(c_n)$, jest rosnącym ciągiem arytmetycznym.

- D 2.55.** Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, jest parabola zwrócona ramionami do góry. Wykaż, że ciąg (d_n) określony wzorem $d_n = f(n+1) - f(n)$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$ jest rosnącym ciągiem arytmetycznym.

- 2.56.** Liczby całkowite a, b, c, d są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 + px^2 + 9$. Wiedząc, że ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem arytmetycznym rosnącym, wyznacz liczby a, b, c, d, p .

Odp. $a = -3, b = -1, c = 1, d = 3, p = -10$; *wskazówka:* Jeśli x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to $(-x_1)$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu. Wówczas $a = -d, b = -c$. Zapisz wielomian $W(x)$ w postaci iloczynowej $W(x) = (x+d)(x+c)(x-c)(x-d)$ i oblicz cd .

Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

2.50. **2.57.** Suma n początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Oblicz:

- a) a_1 b) S_6 c) a_5 d) $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$.

Następnie wyznacz ogólny wyraz ciągu (a_n) .

Odp. a) 3 b) 28 c) 6 d) 46; $a_n = n + 1, n > 1$

2.51. **2.58.** Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n(n^2 - 1)$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Wykaż, że:

- a) $a_n = 3n(n - 1)$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. b) ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

2.52. **2.59.** Sumę n początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) określa wzór $S_n = n^2 - 4n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

- a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
b) Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

Odp. a) *wskazówka*: Wykaż, że $a_n = 2n - 5, n \in \mathbf{N}_+$ b) $a_1 = -3, r = 2$

2.53. **2.60.** Sumę n początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) określa wzór $S_n = 5n - n^2$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

- D** a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym malejącym.
b) Oblicz $a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}$.

Odp. a) *wskazówka*: Wykaż, że $a_n = -2n + 6, n \in \mathbf{N}_+$. b) -114

2.54. **2.61.** Suma ośmiu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 17, a suma trzynastu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 32. Oblicz:

- a) $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}$ b) a_{11} c) $a_{10} + a_{11} + a_{12}$

Odp. a) 15 b) 3 c) 9

2.55. **2.62.** W nieskończonym ciągu arytmetycznym (b_n) , $n \geq 1$, dane są: $b_1 = -4, r = 7$. Wiedząc, że S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu, oblicz:

- a) S_{25} b) $b_{10} + b_{11} + b_{12} + \dots + b_{25}$
c) $b_{13} + b_{14} + b_{15} + \dots + b_{22}$

Odp. a) 2000 b) 1784 c) 1115

2.56. **2.63.** Nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n) opisuje wzór $a_n = 24 - 4n$, $n \geq 1$.

a) Napisz wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

b) Oblicz, ile początkowych wyrazów tego ciągu należy wziąć do sumy, aby jej wartość wynosiła 0.

Odp. a) $S_n = 22n - 2n^2$, $n \in \mathbf{N}_+$ b) jedenastcie początkowych wyrazów

2.57. **2.64.** Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu arytmetycznego (b_n) :
 $b_n = 10,5 - n$, $n \geq 1$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy wziąć do sumy, aby jej wartość była największa? Podaj tę największą wartość.

Odp. $n = 10$; $S_{10} = 50$

2.58. **2.65.** Oblicz:

a) $-7 - 4 - 1 + 2 + 5 + \dots + 227$

b) $8^2 - 10^2 + 12^2 - 14^2 + 16^2 - 18^2 + \dots + 2012^2 - 2014^2$.

Odp. a) 8690 b) $-2\ 030\ 088$; *wskazówka*: Pogrupuj składniki sumy po dwa i zastosuj do każdej grupy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

2.59. **2.66.** Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) parzystych, nie większych od 250

b) dwucyfrowych, podzielnych przez 4.

Odp. a) 15 750 b) 1188

2.60. **2.67.** Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) mniejszych od 200, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 1

b) większych od 100 i jednocześnie mniejszych od 500, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa 1 lub 4.

Odp. a) 6700 b) 48 000

2.61. **2.68.** Suma szesnastu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 728. Wiedząc, że $a_{16} = 63$, oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n) .

Odp. $a_1 = 28$, $r = 2\frac{1}{3}$

2.62. **2.69.** Ciąg (a_n) jest skończonym ciągiem arytmetycznym, którego suma wszystkich wyrazów jest równa 204. Różnica ciągu jest równa 6, a ostatni wyraz ciągu wynosi 49. Ile wyrazów ma ten ciąg?

Odp. sześć

- 2.63. **2.70.** W nieskończonym ciągu arytmetycznym (b_n) dane są: $b_1 = 58$ oraz $r = -3$. Zsumowano kilkanaście początkowych wyrazów tego ciągu i otrzymano 578. Ile wyrazów ciągu (b_n) wzięto do tej sumy?

Odp. siedemnaście

- 2.64. **2.71.** Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny (c_n) , w którym $c_1 = 8$, $r = 3$.

- D** a) Wykaż, że wyrazy ciągu (c_n) o numerach parzystych tworzą ciąg arytmetyczny (b_n) . Podaj różnicę ciągu (b_n) .
b) Oblicz sumę czternastu początkowych wyrazów ciągu (b_n) .

Odp. a) 6 b) 700

- 2.65. **2.72.** Rowerzysta w ciągu pierwszej godziny przejechał 20 km, a w ciągu każdej następnej godziny odcinek o 0,75 km krótszy od poprzedniego. Jaką drogę pokonał rowerzysta, jeśli w ciągu ostatniej godziny przejechał 17 km?

Odp. 92,5 km

- 2.66. **2.73.** Wykopanie pierwszego metra studni kosztuje 8 zł, a każdego następnego o 3 zł drożej od poprzedniego.

- a) Ile kosztuje wykopanie studni głębokości 25 m?
b) Wykopanie studni kosztowało 798 zł. Jaka była jej głębokość?

Odp. a) 1100 zł b) 21 m

- 2.67. **2.74.** Marek chce przekopać swój przydomowy ogródek warzywny o powierzchni 7,83 a. Pierwszego dnia przekopał 27 m². Aby przyspieszyć prace postanowił każdego następnego dnia przekopywać o 4 m² ogródka więcej niż poprzedniego dnia. Ile najmniej dni musi przeznaczyć Marek na wykonanie tej pracy?

Odp. 15 dni

- 2.68. **2.75.** Z pełnego pojemnika zaczęła wylewać się woda. W pierwszej sekundzie wypłynęło 3,4 litra wody, a w każdej następnej o 0,3 litra mniej niż w poprzedniej. W ostatniej sekundzie wypłynęło tylko 0,1 litra wody.

- a) Ile czasu wypływała woda z pojemnika?
b) Jaką pojemność miał pojemnik?

Odp. a) 12 sekund b) 21 litrów

- 2.76.** Rozwiąż dane równanie wiedząc, że po lewej stronie tego równania występuje suma początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego.

- a) $3 + 5 + 7 + \dots + x = 195$

$$\text{b) } (-11) + (-8) + (-5) + \dots + (3x + 1) = 150$$

$$\text{c) } 4 + 8 + 12 + \dots + x^2 = 8320$$

$$\text{Odp. a) } x = 27 \quad \text{b) } x = 10 \quad \text{c) } x \in \{-16, 16\}$$

2.77. Suma stu kolejnych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 2, jest równa 43 950. Wyznacz najmniejszą i największą z tych liczb.

$$\text{Odp. } 93; 786$$

2.78. Suma k początkowych wyrazów ciągu $(1, 4, 7, \dots)$ jest o 5 mniejsza od sumy $k + 4$ początkowych wyrazów ciągu $(20, 21, 22, \dots)$. Oblicz k .

$$\text{Odp. } k = 27$$

D 2.79. Dany jest nieskończony ciąg (a_n) , gdzie $a_n = \frac{5+8+11+14+\dots+(3n+2)}{4n}$, $n \in \mathbf{N}_+$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnącym ciągiem arytmetycznym.

2.80. Oblicz sumę stu początkowych wyrazów ciągu (b_n) , jeśli

$$b_n = \frac{11+16+21+26+\dots+(5n+6)}{5n^2+17n}, \text{ gdzie } n \in \mathbf{N}_+.$$

$$\text{Odp. } 50$$

2.81. Zbadaj na podstawie definicji monotoniczność ciągu (c_n) , gdzie

$$c_n = \frac{3+10+17+24+\dots+(7n-4)}{14n^2+5n-1} \text{ i } n \in \mathbf{N}_+. \text{ Czy ciąg } (c_n) \text{ jest ciągiem arytmetycznym? Odpowiedź uzasadnij.}$$

$$\text{Odp. Ciąg } (c_n) \text{ jest rosnący i nie jest ciągiem arytmetycznym.}$$

D 2.82. Wykaż, że jeśli szósty wyraz nieskończonego ciągu arytmetycznego jest równy zero, to suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu też jest równa zero.

D 2.83. Wykaż, że suma dwudziestu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) , $n \in \mathbf{N}_+$ jest cztery razy większa od sumy $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{15}$.

2.84. W ciągu arytmetycznym o nieparzystej liczbie wyrazów suma wyrazów stojących na miejscach nieparzystych jest równa 44, a suma pozostałych wyrazów wynosi 33. Oblicz wyraz środkowy i liczbę wyrazów tego ciągu.

$$\text{Odp. wyraz środkowy jest równy 11; ciąg ma siedem wyrazów}$$