2.85. Suma wszystkich liczb tablicy poniżej jest równa 1331. Oblicz n.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n+2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 \end{bmatrix}$$

Odp. $n = 11$

D **2.86.** Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 1. Stosunek sumy m początkowych wyrazów ciągu (a_n) do sumy k początkowych wyrazów tego ciągu, gdzie $m \neq k$ i $m, k \in N_+$, wynosi $m^2 : k^2$. Wykaż, że różnica ciągu (a_n) jest równa 2.

D **2.87.** Nieskończony ciąg (b_n), $n \geqslant 1$, jest ciągiem arytmetycznym. Wykaż, że jeśli dla pewnej dodatniej liczby naturalnej k wyrazy tego ciągu spełniają dwie równości: $(2k-1) \cdot b_{2k+1} = 2$ oraz $(2k+1) \cdot b_{2k-1} = 2$, to suma $(4k^2-1)$ początkowych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

Ciąg geometryczny

2.69. **2.88.** Zbadaj, który z danych ciągów (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), gdzie $n \in N_+$, jest geometryczny.

$a_n = 5^n \cdot 2^{n-1}$, $\quad b_n = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}$, $\quad c_n = n \cdot 3^{n-1}$, $\quad d_n = \frac{n+1}{4^n}$

Odp. (a_n), (b_n)

2.70. **2.89.** Wyznacz wyraz ogólny ciągu geometrycznego, określonego wzorem rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 27 \\ a_{n+1} = \frac{3a_n}{2}, \ n \geqslant 1 \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} b_1 = -100 \\ b_n = (-0{,}2) \cdot b_{n-1}, \ n > 1 \end{cases}$ $\quad$ c) $\begin{cases} c_1 = -\frac{3}{4} \\ c_{n+1} = -c_n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$.

Odp. a) $a_n = 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ b) $b_n = 500 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n$ c) $c_n = \frac{3}{4} \cdot (-1)^n$

2.71. **2.90.** Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_7 = -510{,}3$ oraz $q = -3$ b) $a_4 = -4\left(\sqrt{3}+2\right)$ oraz $q = \sqrt{3}+1$.

Odp. a) $a_1 = -0{,}7$ b) $a_1 = 1-\sqrt{3}$

2.72. **2.91.** Ciąg $\left(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, 3, \sqrt[3]{81}, \ldots\right)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym. Oblicz dwudziesty siódmy wyraz tego ciągu i przedstaw go w postaci potęgi liczby 3.

Odp. 3^9

2.73. **2.92.** Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_1 = 0{,}5$ oraz $a_6 = 512$ b) $a_1 = 6$ oraz $a_5 = \frac{2}{27}$

c) $a_2 = -6$ oraz $a_4 = -8{,}64$ d) $a_1 = \frac{1}{7}$ oraz $a_2 \cdot a_4 = 1$

Odp. a) $q = 4$ b) $q = \frac{1}{3} \vee q = -\frac{1}{3}$ c) $q = 1{,}2 \vee q = -1{,}2$ d) $q = -\sqrt{7} \vee q = \sqrt{7}$

2.74. **2.93.** Ciąg (b_n) jest skończonym ciągiem geometrycznym, w którym $b_1 = -1$, $q = -\frac{2}{7}$. Wiedząc, że ostatni wyraz ciągu (b_n) jest równy $\frac{8}{343}$, oblicz liczbę wyrazów tego ciągu.

Odp. cztery

2.75. **2.94.** Dwa środkowe wyrazy sześciowyrazowego, malejącego ciągu geometrycznego są odpowiednio równe $\frac{27}{8}$ i $\frac{9}{4}$. Oblicz różnicę pomiędzy pierwszym i ostatnim wyrazem tego ciągu.

Odp. $6\frac{19}{32}$

2.76. **2.95.** Iloczyn wszystkich wyrazów pięciowyrazowego ciągu geometrycznego jest równy 32. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu.

Odp. 2

2.77. **2.96.** W pewnym nieskończonym ciągu geometrycznym iloczyn wyrazu drugiego
D i ósmego jest równy 36. Wykaż, że piąty wyraz tego ciągu jest równy -6 lub 6.

2.78. **2.97.** Nieskończony ciąg (b_n) o wyrazach dodatnich ma tę własność, że każdy jego wyraz jest o 20% większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego.

a) Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym? Odpowiedź uzasadnij.

b) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu, jeśli jego piąty wyraz jest równy $\frac{1296}{625}$.

Odp. a) tak b) $b_1 = 1$

2.79. **2.98.** Klient banku spłacił pożyczkę w wysokości 13 923 zł w czterech ratach, z których każda następna była o 10% większa od poprzedniej. Oblicz kwotę pierwszej i czwartej raty.

Odp. I. rata: 3000 zł, IV. rata: 3993 zł

2.80. **2.99.** W ciągu geometrycznym (c_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, dane są: $c_6 = -\frac{1}{64}$ i $c_9 = \frac{1}{512}$. Wyznacz wyraz ogólny ciągu (c_n). Czy ciąg (c_n) jest monotoniczny?

Odp. $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; ciąg (c_n) nie jest monotoniczny

2.81. **2.100.** Ciąg (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym, w którym $a_3 = -0{,}36$
D
oraz $a_6 = -1\frac{2}{3}$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący. Wyznacz ogólny wyraz tego ciągu.

Odp. $a_n = -\frac{81}{625} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}_+$

2.82. **2.101.** Ciąg geometryczny ma cztery wyrazy. Jeśli trzeci wyraz tego ciągu zmniejszymy o sumę dwóch pierwszych wyrazów, to otrzymamy 3. Jeśli czwarty wyraz zmniejszymy o sumę dwóch środkowych wyrazów, to otrzymamy 6. Wyznacz ten ciąg.

Odp. $(3, 6, 12, 24)$

2.83. **2.102.** W czterowyrazowym ciągu geometrycznym iloczyn pierwszego i trzeciego wyrazu jest równy 0,64, zaś iloczyn drugiego i czwartego wyrazu wynosi 2,56. Wyznacz ten ciąg.

Odp. $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ lub $\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ lub $\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$

lub $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

2.84. **2.103.** Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (b_n), jeśli:
a) $b_5 - b_3 = 1680$ oraz $b_3 + b_4 = 560$ b) $b_7 - b_3 = 120$ oraz $b_7 - b_5 = 96$.

Odp. a) $b_1 = 7$, $q = 4$ b) $(b_1 = 2,\ q = -2)$ lub $(b_1 = 2,\ q = 2)$

2.85. **2.104.** Wykaż, że liczby $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}$ tworzą w podanej kolejności ciąg
D geometryczny.

2.86. **2.105.** Ciąg $(-9, x, -2)$ jest rosnącym ciągiem geometrycznym. Oblicz x.

Odp. $x = -3\sqrt{2}$

2.87. **2.106.** Liczby $7x + 1$, $2x + 2$, $x - 1$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Oblicz x i wyznacz ten ciąg.

Odp. Jeśli $x = -\frac{1}{3}$, to ciąg ma postać $\left(-1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}\right)$. Jeśli $x = 5$, to otrzymujemy ciąg $(36, 12, 4)$.

2.88. **2.107.** Wykaż, że jeśli ciąg $(x + 15, 8, x - 15)$ jest ciągiem geometrycznym male-
D jącym, to iloraz tego ciągu jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(x) = 4x^4 - x^3 - 32x + 8$.

Odp. $q = \frac{1}{4}$

2.89. **2.108.** Wykaż, że jeśli ciąg $(12, a, b, c, d, 2916)$ jest ciągiem geometrycznym,
D to suma $a + b + c + d$ jest wielokrotnością liczby 5.

2.90. **2.109.** Długości trzech różnych krawędzi prostopadłościennego otwartego zbiornika na wodę tworzą malejący ciąg geometryczny, w którym ostatnim wyrazem jest wysokość tego zbiornika. Pojemność zbiornika wynosi 216 litrów.

D a) Wykaż, że jedna z krawędzi podstawy tego zbiornika ma długość 60 cm.

b) Wiedząc dodatkowo, że długości krawędzi podstawy zbiornika pozostają w stosunku 2 : 1, oblicz pole powierzchni tego zbiornika.

Odp. b) 180 dm^2

2.91. **2.110.** Wykaż, że nieskończony ciąg (c_n) o wyrazie ogólnym $c_n = \frac{6}{3^{2n+1}} + 11 \cdot 9^{-n}$,
D gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, jest ciągiem geometrycznym. Podaj pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

Odp. $c_1 = 1\frac{4}{9}$, $q = \frac{1}{9}$

2.92. **2.111.** *D* Wykaż, że nieskończony ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = 2^{\frac{1+2+3+...+n}{n}}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, jest ciągiem geometrycznym. Podaj pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

Odp. $b_1 = 2,\ q = \sqrt{2}$

D **2.112.** Wykaż, że jeśli nieskończony ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (a_n), gdzie $a_n = c_{3n}$ jest również ciągiem geometrycznym.

D **2.113.** Wykaż, że jeśli nieskończony ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (b_n), gdzie $b_n = -a_{2n+1}$ jest również ciągiem geometrycznym.

2.114. W nieskończonym ciągu geometrycznym (a_n) suma pierwszego i piątego wyrazu jest równa 1285, zaś iloczyn drugiego i czwartego wyrazu wynosi 6400. Wyznacz a_1 i iloraz tego ciągu.

Odp. $\left(a_1 = 1280,\ q = \frac{1}{4}\right)$ lub $\left(a_1 = 1280,\ q = -\frac{1}{4}\right)$ lub $(a_1 = 5,\ q = 4)$ lub $(a_1 = 5,\ q = -4)$

2.115. Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 57, a ich iloczyn wynosi 5832. Wyznacz te liczby.

Odp. 27, 18, 12

2.116. Nieskończony ciąg (c_n) jest niemonotonicznym ciągiem geometrycznym, którego pierwszy wyraz jest równy $\frac{5}{16}$. Wiadomo, że $c_k = 20$ oraz $c_{k+2} = 160$ dla pewnej dodatniej liczby naturalnej k. Wyznacz:

a) c_3 oraz c_8

b) liczbę k.

Odp. a) $c_3 = 2\frac{1}{2},\ c_8 = -320\sqrt{2}$ b) $k = 5$

D **2.117.** Ciąg (b_n) jest malejącym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Wykaż, że jeśli różnica między ósmym i dziesiątym wyrazem tego ciągu jest cztery razy większa od różnicy między wyrazem dziewiątym i dziesiątym , to iloraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{3}$.

D **2.118.** Wykaż, że jeśli ciąg $(a,\ b,\ c)$ jest ciągiem geometrycznym, to prawdziwa jest równość $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

D **2.119.** Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym oraz $a_1 - a_4 < a_3 - a_2$, to $a_1 < a_2$.

Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

2.93. **2.120.** Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, jeśli:

a) $a_1 = -\frac{1}{3}$, $q = -2$ b) $a_1 = 8$, $q = \sqrt{2}$.

Odp. a) 7 b) $56(1+\sqrt{2})$

2.94. **2.121.** Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n), określonego wzorem:

a) $\begin{cases} b_1 = 1-\sqrt{3} \\ b_{n+1} = 2b_n,\ n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $b_n = \frac{3}{5^n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$

Odp. a) $31 \cdot (1-\sqrt{3})$ b) $\frac{2343}{3125}$

2.95. **2.122.** Suma czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $\frac{65}{81}$. Oblicz pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego, jeśli iloraz tego ciągu wynosi $\frac{2}{3}$.

Odp. $\frac{1}{3}$

2.96. **2.123.** Suma dziewięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $127\frac{3}{4}$. Oblicz dziewiąty wyraz tego ciągu wiedząc, że iloraz ciągu jest równy 2.

Odp. 64

2.97. **2.124.** Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (b_n), w którym $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać wynik $8\frac{8}{9}$?

Odp. cztery

2.98. **2.125.** Nieskończony ciąg $(96, -48, 24, \ldots)$ jest ciągiem geometrycznym. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy wziąć do sumy, aby jej wartość była równa 64,5?

Odp. siedem

2.99. **2.126.** Oblicz daną sumę wiedząc, że kolejne składniki sumy to kolejne wyrazy pewnego ciągu geometrycznego. Ile składników występuje w tej sumie?

a) $10\frac{1}{8}+6\frac{3}{4}+4\frac{1}{2}+\ldots+1\frac{1}{3}$ b) $-1\frac{7}{8}+3\frac{3}{4}-7\frac{1}{2}+\ldots+240$

Odp. a) $27\frac{17}{24}$, sześć wyrazów b) $159\frac{3}{8}$, osiem wyrazów

2.100. **2.127.** Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 729, a ostatni 96. Wiedząc, że suma wyrazów tego ciągu wynosi 1995, oblicz:

a) iloraz tego ciągu   b) liczbę wyrazów tego ciągu.

Odp. a) $q=\frac{2}{3}$ b) sześć

2.101. **2.128.** Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 128, a ostatni 1458. Wiedząc, że suma wyrazów tego ciągu wynosi 4118, oblicz:

a) iloraz tego ciągu   b) liczbę wyrazów tego ciągu.

Odp. a) $q=\frac{3}{2}$ b) siedem

2.102. **2.129.** Dyrektor firmy przyznał pracownikom nagrody, o łącznej wartości 14 760 zł. Największa nagroda wynosiła 5000 zł, a każda następna była pewnym stałym ułamkiem poprzedniej. Wartość najmniejszej nagrody to 2560 zł. Oblicz, ile było nagród i jaką wartość miały pozostałe nagrody.

Odp. cztery nagrody; 4000 zł, 3200 zł

2.103. **2.130.** Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów malejącego ciągu geometrycznego wiedząc, że drugi wyraz tego ciągu jest równy 20, a czwarty jest równy 5.

Odp. $79\frac{59}{64}$

2.104. **2.131.** Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{4}$, a suma jego trzech początkowych wyrazów wynosi 1,75. Wyznacz:

a) iloraz tego ciągu   b) wyraz ogólny tego ciągu.

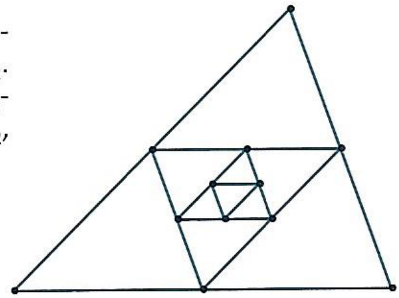
Odp. a) $q = -3$ lub $q = 2$

b) Jeśli $q = -3$, to $a_n = \frac{1}{4} \cdot (-3)^{n-1}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$. Jeśli $q = 2$, to $a_n = 2^{n-3}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$

2.105. **2.132.** Ciąg geometryczny ma cztery wyrazy, których suma jest równa 130. Średnia arytmetyczna wyrazów skrajnych jest równa 35. Wyznacz ten ciąg.

Odp. $(54, 36, 24, 16)$ lub $(16, 24, 36, 54)$

2.106. **2.133.** Obwód trójkąta T_1 jest równy 96 cm. Środki boków trójkąta T_1 są wierzchołkami trójkąta T_2. Środki boków trójkąta T_2 są wierzchołkami trójkąta T_3 itd. Oblicz sumę obwodów trójkątów T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7.

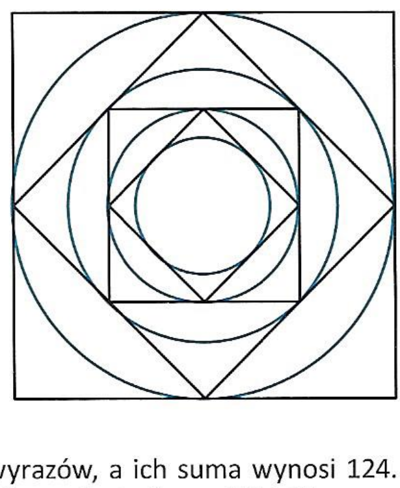


Odp. 190,5 cm

2.107. **2.134.** Trójkąt T_1 jest trójkątem równobocznym, którego każdy bok ma długość 8 cm. Środki boków trójkąta T_1 są wierzchołkami trójkąta T_2. Środki boków trójkąta T_2 są wierzchołkami trójkąta T_3 itd. Oblicz sumę pól trójkątów T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6.

Odp. $\frac{1365\sqrt{3}}{64}$ cm^2

2.108. **2.135.** W kwadrat o boku 16 cm wpisano koło K_1. W koło K_1 wpisano kwadrat, a w ten kwadrat koło K_2. W koło K_2 wpisano kwadrat, a w ten kwadrat koło K_3, itd. Oblicz sumę: a) obwodów b) pól kół K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8.



Odp. a) $15\pi(2+\sqrt{2})$ cm b) $\frac{255\pi}{2}$ cm^2

2.136. Ciąg geometryczny składa się z pięciu wyrazów, a ich suma wynosi 124. Iloraz sumy wyrazów skrajnych przez wyraz środkowy jest równy 4,25. Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

Odp. $\left(a_1 = 64,\ q = \frac{1}{2}\right)$ lub $\left(a_1 = \frac{1984}{11},\ q = -\frac{1}{2}\right)$ lub $(a_1 = 4,\ q = 2)$ lub $\left(a_1 = \frac{1984}{11},\ q = -\frac{1}{2}\right)$ lub $\left(a_1 = \frac{124}{11},\ q = -2\right)$

D 2.137. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o parzystej liczbie wyrazów, w którym $a_1 \neq 0$ oraz $q \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 1\}$. Wykaż, że stosunek sumy wszystkich wyrazów tego ciągu do sumy wyrazów o numerach parzystych jest równy $\frac{1+q}{q}$.

D 2.138. Dany jest ciąg dziesięciu kwadratów, z których każdy kolejny ma boki o 50% krótsze od boków poprzedniego kwadratu. Wykaż, że suma pól kwadratów o numerach nieparzystych jest cztery razy większa od sumy pól kwadratów o numerach parzystych.

D 2.139. Z półokręgów budujemy krzywą. Pierwszy półokrąg ma promień r, a promień każdego następnego półokręgu stanowi $\frac{2}{3}$ promienia poprzedniego. Niech n oznacza liczbę półokręgów tworzących tę krzywą. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n długość krzywej jest mniejsza od $3\pi r$.

D 2.140. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n suma

$$3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{n\text{ cyfr}} \text{ jest równa } \frac{10^{n+1}-9n-10}{27}.$$

D 2.141. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n suma

$$12+1212+121212+\ldots+\underbrace{121212\ldots12}_{n\text{ grup }(12)} \text{ jest równa } \frac{4}{33}\cdot\frac{100^{n+1}-99n-100}{99}.$$

D 2.142. Wykaż, że liczba $\underbrace{444\ldots4}_{20\text{ cyfr}}-\underbrace{888\ldots8}_{10\text{ cyfr}}$ jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne

2.109. **2.143.** Ciąg $(x, y, 1)$ jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(1, x, y)$ jest ciągiem geometrycznym. Oblicz x i y.

Odp. $(x=1 \wedge y=1)$ lub $(x=-0{,}5 \wedge y=0{,}25)$

2.110. **2.144.** Ciąg $(x-1, y, 11)$ jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(x, y, 18)$ jest ciągiem geometrycznym. Oblicz x i y. Wyznacz te ciągi. Podaj różnicę ciągu arytmetycznego i iloraz ciągu geometrycznego.

Odp. I. $x=2$ i $y=6$; wówczas ciąg $(1, 6, 11)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 5, a ciąg $(2, 6, 18)$ – ciągiem geometrycznym o ilorazie 3;