Odpowiedzi i wskazówki

Zadania zamknięte

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Odpowiedź	A	C	D	D	B	B	A	C	A	A	B

Nr zadania	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
Odpowiedź	A, B, C	B, C	A, C	A, C	A, B	A	A, B	A, B, C

Zadania otwarte

6.1. **a)** $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}$, **b)** 1, 5, 14, 30, **c)** 1, 4, 9, 16, **d)** 1, 5, 23, 119.

6.2. **a)** Nie, **b)** tak. *Wskazówka:* Wystarczy sprawdzić, czy iloraz $q=\frac{b_{n+1}}{b_n}$ jest stały (czy nie zależy od n, gdzie $n \in N^+$).

6.3. $a_2=0,\ a_3=0,\ a_5=0$.

6.4. $\begin{cases} q=1 \\ a_1=\frac{62}{3} \end{cases}$ lub $\begin{cases} q=5 \\ a_1=2 \end{cases}$. *Wskazówka:* Niech liczby $a_1=a,\ a_2=aq,\ a_3=aq^2$ będą trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego. Z warunków zadania wynika, że

$$\begin{cases} a+aq+aq^2=62 \\ aq^2-aq=5(aq-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+aq+aq^2=62 \\ aq(q-1)-5a(q-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+aq+aq^2=62 \\ a(q-1)(q-5)=0 \end{cases}.$$

6.5. $x=y=3$ lub $\begin{cases} x=27 \\ y=15 \end{cases}$. *Wskazówka:* Liczby 3, y, x tworzą ciąg arytmetyczny, więc $y=\frac{3+x}{2}$, a liczby 3, $y-6$, x tworzą ciąg geometryczny, więc $(y-6)^2=3x$.

Rozwiązując układ równań $\begin{cases} y=\frac{3+x}{2} \\ (y-6)^2=3x \end{cases}$ otrzymujemy odpowiedź.

6.6. Ciąg arytmetyczny: $a_1=9$ i $r=8$, ciąg geometryczny: $b_1=9$ i $q=\frac{5}{3}$.

Wskazówka: Niech liczby 9, a, b, gdzie $9<a<b$, będą trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n), wtedy liczby 9, $a-2$, b będą trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego (b_n).

Rozwiązując układ równań $\begin{cases} a=\frac{9+b}{2} \\ (a-2)^2=9b \end{cases}$ mamy $\begin{cases} a=17 \\ b=25 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$.

6.7. Szukane liczby to: 8, 5, 2 lub 2, 5, 8. *Wskazówka:* Niech liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny i liczby a, $b-1$, c tworzą ciąg geometryczny. Z warunków zadania otrzymujemy układ równań

$\begin{cases} a+b+c=15 \\ b=\frac{a+c}{2} \\ (b-1)^2=ac \end{cases}$. Z równania $b=\frac{a+c}{2}$ wyznaczamy $a+c=2b$ i podstawiamy do równania $(a+c)+b=15$.

6.8. Szukane liczby to: 2, 5, 8 lub 26, 5, −16. *Wskazówka:* Liczby *a*, *b*, *c* tworzą ciąg arytmetyczny i liczby $a+1,\ b+4,\ c+19$ tworzą ciąg geometryczny.

Z warunków zadania otrzymujemy układ równań: $\begin{cases} a+b+c=15 \\ b=\dfrac{a+c}{2} \\ (b+4)^2=(a+1)(c+19) \end{cases}$.

6.9. Szukane liczby to 4, 2, 1. *Wskazówka:* Z warunków zadania otrzymujemy układ równań: $\begin{cases} b^2=ac \\ a+b+c=7 \\ a=\dfrac{4}{3}(b+c) \end{cases}$.

Rozwiązując powyższy układ i uwzględniając, że jest to ciąg malejący, otrzymujemy odpowiedź.

6.10. $\begin{cases} a_9=2 \\ q=-1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_9=32 \\ q=\pm\sqrt{2} \end{cases}$. *Wskazówka:* Korzystając z wzoru $S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$, gdzie $q\neq 1$, i uwzględniając warunki zadania $a_1=2$ i $S_8=5\cdot S_4$, otrzymujemy równanie $\dfrac{2\left(1-q^8\right)}{1-q}=\dfrac{5\cdot 2\left(1-q^4\right)}{1-q}$, gdzie $q^4>0$ i $q\neq 1$.

Stąd $q^8-5q^4+4=0$, gdzie $q^4>0$ i $q\neq 1$. Uwaga: Jeżeli $q=1$, to $S_8\neq 5\cdot S_4$.

6.11. Szukane liczby to 31, 31, 31 lub 3, 15, 75. *Wskazówka:* Liczby *a*, *b*, *c* tworzą ciąg geometryczny i niech $a=a_1,\ b=a_2,\ c=a_7$ są wyrazami ciągu arytmetycznego, czyli $a_1=a,\ b=a+r,\ c=a+6r$, gdzie r to różnica ciągu. Z warunków zadania otrzymujemy układ równań: $\begin{cases} a+b+c=93 \\ b^2=ac \end{cases}$. Uwzględniając, że $a_1=a,\ b=a+r,\ c=a+6r$, otrzymujemy $\begin{cases} a+a+r+a+6r=93 \\ (a+r)^2=a(a+6r) \end{cases}$, skąd $\begin{cases} a=31 \\ r=0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=3 \\ r=12 \end{cases}$.

6.12. **a)** $a_n=\dfrac{\pi}{6}n$, **b)** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, **c)** 0. *Wskazówka:* **a)** Z warunków zadania $a_3=\dfrac{\pi}{3}$ i $a_6=\pi$, więc $a_1=\dfrac{\pi}{6}$ i $r=\dfrac{\pi}{6}$, zatem $a_n=\dfrac{\pi}{6}n$. **b)** $\cos a_5-\sin a_7=\cos\dfrac{5}{6}\pi-\sin\dfrac{7}{6}\pi=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

c) Ponieważ $S_{12}=\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{6}+12\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot 12}{2}=13\pi$, więc $\operatorname{tg} S_{12}=\operatorname{tg}13\pi=0$.

6.13. $x=2$. *Wskazówka:* Z własności ciągu geometrycznego:

$\left(x^2+3x\right)^2=(x+3)(11x-2)\ \Leftrightarrow\ (x+3)(x-2)\left(x^2+5x-1\right)=0.$

Wyrazy ciągu są liczbami całkowitymi, gdy $x=2$ lub $x=-3$.

Dla $x=-3$ ciąg nie jest geometryczny (0, 0, −35), dla $x=2$ ciąg jest geometryczny (5, 10, 20).

6.14. Dziewięć wyrazów. *Wskazówka:* $q^2 = \frac{a_4}{a_2} = \frac{1}{4}$, więc $q = -\frac{1}{2}$ lub $q = \frac{1}{2}$. Ponieważ ciąg nie jest monotoniczny, więc $q = -\frac{1}{2}$ i $a_1 = 160$. $S_n = 106\frac{7}{8}$, gdy $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^9$.

6.15. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in C$.

Wskazówka: Z warunków zadania $\cos^2 x = \sin x \cdot \frac{1}{2\operatorname{tg} x}$, gdzie $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$.

6.16. **b)** $a_{21} = 20$, $a_{22} = 21$. *Wskazówka:* **a)** $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{2n - 1} = \frac{(2n-1)(n-1)}{2n-1} = n - 1$,

b) rozwiąż równanie $(n-1)^3 - n^3 = -1261$.

6.17. *Wskazówka:* Ciąg (a_n) jest geometryczny, więc $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, skąd $\log_p a_n^2 = \log_p (a_{n-1} \cdot a_{n+1})$ (logarytmowanie stronami), czyli $\log_p a_n = \frac{\log_p a_{n-1} + \log_p a_{n+1}}{2}$.

6.18. $r = 0$ i $a_1 \neq 0$ lub $r \neq 0$ i $a_1 = 2r$. *Wskazówka:* Z warunków zadania: $\frac{a_1}{a_1 + r} = \frac{a_1 + 2r}{a_1 + 4r}$, skąd $r(a_1 - 2r) = 0$. Jeśli $r = 0$, to $a_1 \neq 0$ lub jeśli $a_1 = 2r$, to $r \neq 0$.

6.19. $a_1 \neq 0$ i $q = -\frac{1}{2}$ lub $a_1 \neq 0$ i $q = 1$. *Wskazówka:* Z warunków zadania $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$ i $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$. $2 \cdot a_1 q^{n+1} = a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \Leftrightarrow a_1 q^{n-1}(2q^2 - q - 1) = 0$, skąd $q = -\frac{1}{2}$ lub $q = 1$.

6.20. **a)** $a_n = 3 \cdot 2^n$, **b)** $x = 11$.

6.21. *Wskazówka:* $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$, skąd

$a^2 - ab + ac + ab - b^2 + bc + ac - bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$, czyli $-2b^2 + 2ac = 0$ więc $b^2 = ac$.

Zatem liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny.

6.22. $q \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

6.23. 10^{19}. *Wskazówka:* Jeśli $a_1 q^9 = 10$, to $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{19} = a_1^{19} \cdot q^{1+2+3+\ldots+18} = (a_1 q^9)^{19}$.

6.24. $a_1 = 10^{100}$. *Wskazówka:* Z warunków zadania:

1° $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{99} = 100(a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{100})$, skąd

$$a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{98}) = 100 \cdot a_1 q (1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{98}), \text{ więc } 100q = 1.$$

2° $\log(a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \ldots \cdot a_1 q^{99}) = 100$, czyli $a_1^{100} \cdot q^{1+2+3+\ldots+98} = 10^{100}$, więc $a_1^{100} = (10^{100})^{100}$.

6.25. *Wskazówka:* $a_{n+1} = 2a_n + 1 \Leftrightarrow a_{n+1} - 2a_n = 1$.

Zatem $2^{n+1} + 1 - 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 1 - 2^{n+1} + 2 = 1$. ***c.n.u.***

6.26. **a)** 2, 0, –4, 12, **b)** $2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}$, **c)** $2, \frac{5}{4}, \frac{41}{40}, \frac{3281}{3280}$, **d)** $1, 3, 2, \frac{5}{2}$, **e)** –1, –2, –7, –20, **f)** $\frac{\pi}{6}, \pi, 0, 0$.

6.27. Tak.

6.28. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1 \end{cases}$, gdy $n \in N^+$. *Wskazówka:* $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$ i $a_n = \frac{n^2 + n}{2}$, więc

$a_{n+1} - a_n = n + 1$, skąd $a_{n+1} = a_n + n + 1$.

6.29. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \{101, 102, ...\}$. *Wskazówka:* $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... , $a_n = \frac{1}{n}$.

6.30. $a_n = 5n + 4$, $a_6 = 34$. *Wskazówka:* Zauważ, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny, bo $a_{n+1} - a_n = 5$.

6.31. *Wskazówka:* Zauważamy, że $a_{n+1} - a_n = \cos\alpha = const$. Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, więc $a_n = \sin\alpha + (n-1)\cdot\cos\alpha$. Z warunków zadania: $a_3 = \sin\alpha + 2\cos\alpha$, więc $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 2$.

Aby rozwiązać równanie $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 2$, rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} \sin\alpha + 2\cos\alpha = 2 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 2(1-\cos\alpha) \\ 4(1-\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} \sin\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos\alpha = \frac{3}{5} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 1 \end{cases}.$$

Warunki zadania spełniają dwa ciągi arytmetyczne $a_n = \frac{3}{5}n + \frac{1}{5}$ lub $a_n = n - 1$. ***c.n.u.***

6.32. *Wskazówka:* Ponieważ $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 10 \end{cases}$, więc $a_{n+1} - a_n = 10 = const$.

Zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny o wyrazie pierwszym $a_1 = 2$ i różnicy $r = 10$.

6.33. **a)** $\frac{3}{2}$, **b)** –5, **c)** 1, **d)** 0, **e)** 0, **f)** $2\sqrt{2}$.

6.34. **a)** $+\infty$, **b)** $-\infty$, **c)** $+\infty$, **d)** $-\infty$, **e)** $+\infty$, **f)** nie istnieje.

6.35. **a)** $\frac{1}{4}$, **b)** –1, **c)** 0, **d)** 0. **6.36.** **a)** $\frac{7}{8}$, **b)** $-\frac{1}{6}$. **6.37.** **a)** $+\infty$, **b)** $-\frac{2}{5}$, **c)** 2, **d)** 2, **e)** 0, **f)** 2.

6.38. **a)** –1, **b)** 0, **c)** –3, **d)** $\frac{5}{128}$. **6.39.** **a)** 1, **b)** $\frac{4}{3}$, **c)** $\frac{1}{16}$, **d)** 0, **e)** 1, **f)** 1, **g)** $+\infty$.

Wskazówka: **c)** $a_n = \frac{1 + 6 + 6^2 + ... + 6^{n-1}}{1 - 36^n} = \frac{1\cdot\frac{1-6^n}{1-6}}{1-6^{2n}} = \frac{\frac{1}{5}(6^n - 1)}{(1-6^n)(1+6^n)} = -\frac{1}{5(1+6^n)}$.

f) Przekształcamy wyrażenie $n + 5n + 9n + 13n + ... + (4n^2 - 3n)$ do postaci $n[1 + 5 + 9 + 13 + ... + (4n-3)]$ i stosujemy wzór na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego, skąd $a_n = \frac{(n+1)(2n-1)}{n+2}$.

6.40. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** tak, **d)** tak.

Wskazówka: **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} : \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = 4$, **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7\cdot(1-7^n)}{(1-7)\cdot(3\cdot7^n - 2)} = \frac{7}{18}$, **d)** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

6.41. **a)** $p=1$, **b)** $p=-7$, **c)** $p_1=-6$, $p_2=1$.

6.42. **a)** $k=-4$, **b)** $k=-1$, **c)** $k>2$. *Wskazówka:* **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\frac{3}{k+1}$, gdy $k\neq-1$, **b)** $a_n=-3n-2$, gdy $k=-1$, **c)** $a_n=\frac{n^k}{n^2+n}$.

6.43. **a)** $a_n=9-6n$, **b)** -59100, **c)** 36.

Wskazówka: **a)** $a_n=S_n-S_{n-1}=9-6n$ i $a_1=S_1$, **b)** sto początkowych wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych tworzy ciąg arytmetyczny (b_n), w którym $b_1=a_1=3$, $b_2=a_3=-9$, skąd $r=-12$ oraz $S_{100}=\frac{[3+3+99\cdot(-12)]\cdot 100}{2}=-59100$, **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n^2}{n^2-a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(9-6n)^2}{n^2-(9-6n)}=36$.

6.44. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=1998$.

Wskazówka: Z układu $\begin{cases} a_1+3r=4007 \\ a_1+6r=7004 \end{cases}$ obliczamy $r=999$ i $a_1=1010$, więc $a_n=1010+(n-1)\cdot 999$.

Z układu $\begin{cases} b_1q^2=1{,}25 \\ b_1\left(1+q+q^2\right)=8{,}75 \end{cases}$ obliczamy $q=-\frac{1}{3}$ lub $q=\frac{1}{2}$ oraz $b_1=5$.

Ponieważ ciąg (b_n) jest monotoniczny, to $q=-\frac{1}{3}$ nie spełnia warunków zadania.

Zatem $b_n=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ i $c_n=\frac{2\cdot[1010+(n-1)999]}{n\left[5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1\right]}=\frac{2\cdot 999n+2\cdot 11}{n\left[5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1\right]}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=2\cdot 999=1998$.

6.45. $a_n=4-\frac{1}{n}$, gdy $k=1$. *Wskazówka:* $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=-k^2+2k+3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=4 \end{cases}$, skąd $k=1$.

6.46. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{-2}{1-\frac{1}{2}}=-4$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{15}{2}$. *Wskazówka:* Jeśli $|q|<1$, to $S=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}$.

6.47. **a)** $3\left(\sqrt{3}+1\right)$, **b)** $\sqrt{2}+1$, **c)** $\frac{5\sqrt{5}}{4}$.

6.48. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{200}{9}$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{5}{3}$. *Wskazówka:* **a)** $S_n=\frac{20\cdot\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{10}}=\frac{200}{9}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$,

b) $S_n=\frac{1{,}25\cdot\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{3}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

6.49. **a)** $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, **b)** $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$, **c)** $x \approx 37°$. *Wskazówka:* **b)** $-1 < \operatorname{tg} x < 1$, **c)** $\frac{1}{1-\operatorname{tg} x} = 4$, skąd $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$.

6.50. $S = 1+\sqrt{3}$. *Wskazówka:* $a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ i $a_2 = \frac{2}{3}$, więc $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Zatem $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

6.51. **a)** $x = \frac{1}{2}$, **b)** $x = \frac{3}{8}$, **c)** $x = \frac{2}{3}$, **d)** $x = 3$, **e)** $x = 4$, **f)** $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6.52. **a)** $x \in (-3; +\infty)$, **b)** $x \in (-1; 1)$, **c)** $x \in \left(-2; -\frac{1}{4}\right)$, **d)** $x \in (0; +\infty)$.

6.55. **a)** $S_5 = \frac{a^2\sqrt{3}}{1024}$, **b)** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. *Wskazówka:* Zauważ, że długości boków trójkątów T_n tworzą ciąg geometryczny (b_n) o ilorazie $q = \frac{1}{2}$, w którym $b_1 = a$, $b_2 = \frac{1}{2}a$, $b_3 = \frac{1}{4}a$, ... , $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot a$, ...

Pole S_n każdego z trójkątów T_n będzie więc dane wzorem $S_n = \frac{b_n^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2^{2n}}$.

b) $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2^{2(n+1)}} : \frac{a^2\sqrt{3}}{2^{2n}} = \frac{1}{4} = q$. Zatem jest to ciąg geometryczny zbieżny (bo $\frac{1}{4} \in (-1; 1)$) i jego suma $S = \frac{S_1}{1-q} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ $(S_1 = a_1)$.

6.56. $n \in N^+$ i $n > 9$. *Wskazówka:* Ponieważ istnieje suma tego ciągu, więc $q \in (-1; 1)$ i $q \neq 0$.

Obliczamy a_1 i q, rozwiązując układ równań: $\begin{cases} S = \frac{16}{3} \\ S_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = \frac{16}{3} \\ \frac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Z warunków zadania $|S - S_n| < \frac{1}{96} \Leftrightarrow \left|\frac{16}{3} - \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\right| < \frac{1}{96} \Leftrightarrow \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^9 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}\right|^n < \left(\frac{1}{2}\right)^9$, skąd $n > 9$.

6.57. $k = \frac{1}{2}$. *Wskazówka:* Ponieważ $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{k}{1+k^2}$, więc badamy dla jakich k funkcja $f(k) = \frac{k^2}{1+k^2}$ ma wartość największą. $D_f = \mathbf{R}$ i $\lim\limits_{k \to -\infty} f(k) = \lim\limits_{k \to +\infty} f(k) = 0$ i $f'(k) = 0$, gdy $k = -1$ lub $k = 1$.

6.58. $m \in (-\sqrt{5}; -2) \cup (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{5})$, $S = \frac{1}{(m+2)\left(5-m^2\right)}$.

6.59. $f(x) = 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + ... = \frac{2x^2}{1-x}$, gdy $x \in (-1; 1)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ lub $x = 2$ i $2 \notin (-1; 1)$, $f_{\min} = f(0) = 0$.

6.60. $D_f = (1; 2) \cup (3; 4)$, $Y_f = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. *Wskazówka:* Zauważ, że $-1 < x^2 - 5x + 5 < 1$ (bo $|q| < 1$) i $f(x) = \frac{-1}{x^2 - 5x + 4}$. Wykaż, że funkcja f nie ma ekstremów w zbiorze D_f. Oblicz granice jednostronne na końcach przedziałów $(1; 2)$ i $(3; 4)$.