6. Ciągi liczbowe

Zadania zamknięte

W zadaniach od 1. do 11. wskaż poprawną odpowiedź.

1. Nieprawdziwa jest równość:

A) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}{2}\cdot n$, **B)** $1+3+5+7+...+2n-1=n^2$,

C) $2+4+6+8+...+2n=n(n+1)$, **D)** $1+2+3+4+...+n=\frac{1+n}{2}\cdot n$.

2. Rozbieżny do $+\infty$ jest ciąg (a_n) określony wzorem:

A) $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-2}$, **B)** $a_n=\frac{2n^2-n}{1-4n-6n^2}$, **C)** $a_n=\frac{2^{5n}}{8^n}$, **D)** $a_n=\frac{4\cdot 7^n}{2^{n+1}-3\cdot 7^{n-1}}$.

3. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-k)\cdot n^3-2n}{4-3n^3}=\frac{1}{3}$, to:

A) $k=-3$, **B)** $k=-1$, **C)** $k=1$, **D)** $k=3$.

4. Suma czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=2a_n-2 \end{cases}$, gdzie $n\in N^+$, jest równa:

A) 2, **B)** 4, **C)** 6, **D)** 8.

5. Piąty wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem $\begin{cases} a_1=-2 \\ a_{n+1}=a_n-2n \end{cases}$, gdzie $n\in N^+$, jest równy:

A) -32, **B)** -22, **C)** -14, **D)** -8.

6. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, w którym $a_1=120$ i $q=-\frac{1}{2}$, jest równa:

A) 60, **B)** 80, **C)** 120, **D)** 180.

7. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=3\cdot a_n \end{cases}$

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.	P	F
Ciąg (a_n) można przedstawić wzorem $a_n = \frac{2}{3} \cdot 3^n$.	P	F

A) PP **B)** PF **C)** FP **D)** FF

8. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n! \cdot (n+1)!}{(n-1)! \cdot (n+2)!} = 0$.	P	F
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p \cdot n^2 + 3n}{3n^2 + 4n - 1} = \sqrt{8}$, gdy $p = 6\sqrt{2}$.	P	F

A) PP **B)** PF **C)** FP **D)** FF

9. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub F – jeśli jest fałszywe.*

Rozwiązaniem równania $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... = \frac{1}{x} + 2$ jest liczba –2, gdy lewa strona jest sumą nieskończonego zbieżnego ciągu geometrycznego.	P	F
Dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x) = x + \frac{x}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} + ...$, gdzie prawa strona jest sumą nieskończonego zbieżnego ciągu geometrycznego jest zbiór $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.	P	F

A) PP **B)** PF **C)** FP **D)** FF

10. Ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \end{cases}$, gdy $n \in N^+$.

Czy ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = 5 - 2n$?

Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród oznaczonych literami A i B.

T	ponieważ	A	$a_1 = 3,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1,\ a_4 = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$. Kolejne wyrazy ciągu (a_n) różnią się o 2, więc $r = -2$ i $a_1 = 3$. Zatem $a_n = 3 + (n-1) \cdot (-2)$.
N		B	$a_1 = 3,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1,\ a_4 = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$. Kolejne wyrazy ciągu (a_n) różnią się o 2, więc $r = 2$ i $a_1 = 3$. Zatem $a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$.

A) $T - A$ **B)** $T - B$ **C)** $N - A$ **D)** $N - B$

11. Czy prawdą jest, że $4+\frac{4}{5}+\frac{4}{25}+\ldots=5$?

Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród oznaczonych literami A i B.

T	ponieważ	A	$4+\frac{4}{5}+\frac{4}{25}+\ldots=\frac{4}{4-\frac{1}{5}}=\frac{20}{19}$.
N		B	$4+\frac{4}{5}+\frac{4}{25}+\ldots=\frac{4}{\frac{4}{5}}=5$.

A) $T-A$ **B)** $T-B$ **C)** $N-A$ **D)** $N-B$

W zadaniach od 12. do 19. wskaż odpowiedzi, które są poprawne.

12. Liczby x^2-1, $3x$, $6x$ w podanej kolejności są wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie q. Zatem:

A) $x=2$ i $q=2$, **B)** $x=0$ i $q=0$, **C)** $x=-\frac{1}{2}$ i $q=2$.

13. Suma S_n ciągu (a_n) jest określona wzorem $S_n=n^2+3n$. Zatem:

A) $a_3=6$, **B)** $a_7+a_8+a_9+a_{10}=11^2-45$, **C)** $\begin{cases} a_1=4 \\ a_{n+1}=a_n+2 \end{cases}$.

14. Między liczby -2 i -162 wstawiono trzy liczby tak, aby wraz z podanymi liczbami tworzyły ciąg geometryczny (a_n). Zatem:

A) ciąg ten można określić wzorem $a_n=-2\cdot 3^{n-1}$ lub wzorem $a_n=-2\cdot(-3)^{n-1}$,

B) ciąg (a_n) ma granicę właściwą,

C) wszystkie nieparzyste wyrazy ciągu (a_n) są liczbami ujemnymi.

15. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n=\frac{n^4+4n^3-n^2-4n}{n^2-1}$. Zatem:

A) wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są liczbami naturalnymi,

B) ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym,

C) $a_8-a_7=19$.

16. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiadomo, że: $a_1+a_5=4$ i $a_3+a_9=40$. Zatem:

A) $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)=+\infty$, **B)** $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3n^2}{n\cdot a_n}=-\frac{1}{2}$,

C) liczba $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{100}$ jest podzielna przez 16.

17. O ciągu geometrycznym (a_n) wiadomo, że jest monotoniczny oraz $a_1 \cdot a_4 = 288$ i $a_2 \cdot a_6 = 36$. Zatem:

A) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = 96$, **B)** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) = +\infty$,

C) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 1$.

18. W nieskończonym ciągu geometrycznym (a_n) suma wszystkich wyrazów jest równa 1 i $a_2 = \frac{2}{9}$. Wówczas:

A) $a_1 = \frac{2}{3}$ i $q = \frac{1}{3}$, **B)** $a_1 = \frac{1}{3}$ i $q = \frac{2}{3}$, **C)** $a_1 = \frac{2}{3}$ i $q = \frac{2}{3}$.

19. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k^3-1)n^3 - 3n^2}{(k-1)n^3} = 1$, to wartość parametru k jest równa:

A) 0, **B)** -1, **C)** -1 lub 0.

Zadania otwarte

Ciąg arytmetyczny i geometryczny

6.1. Wypisz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) określonego wzorem:

a) $a_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$, b) $a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$,

c) $a_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$, d) $a_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!$.

6.2. Sprawdź, czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym, gdy jego n-ty wyraz jest określony wzorem:

a) $b_n = 2^{n^2}$, b) $b_n = \left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right)^n$.

6.3. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^3 - 10n^2 + 31n - 30$. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu, które są równe zero.

6.4. Suma trzech kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 62. Różnica wyrazów trzeciego i drugiego jest pięć razy większa od różnicy wyrazów drugiego i pierwszego. Wyznacz ten ciąg.

6.5. Między liczby 3 i x wstawiono liczbę y tak, że liczby $3, y, x$ tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli liczbę y pomniejszymy o 6, to liczby: $3,\ y-6, x$ utworzą ciąg geometryczny. Oblicz liczby x i y.

6.6. Rosnące ciągi arytmetyczny i geometryczny mają pierwsze wyrazy równe 9. Trzecie wyrazy tych ciągów są także równe. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest o 2 większy od drugiego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznacz te ciągi.

6.7. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 15. Jeżeli od drugiej liczby odejmiemy jeden, a pozostałe zostawimy bez zmiany, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz wyrazy ciągu arytmetycznego.

6.8. Suma trzech liczb, które są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, jest równa 15. Jeżeli liczby te powiększy się odpowiednio o 1, 4, 19, to otrzyma się trzy liczby, które są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Jakie to są liczby?

6.9. Trzy liczby, których suma jest równa 7 są kolejnymi wyrazami malejącego ciągu geometrycznego. Największa z nich jest iloczynem liczby $\frac{4}{3}$ przez sumę pozostałych. Wyznacz te liczby.

6.10. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 2. Suma ośmiu początkowych jego wyrazów jest 5 razy większa od sumy czterech początkowych wyrazów. Oblicz dziewiąty wyraz tego ciągu.

6.11. Trzy liczby, których suma jest równa 93, są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi i siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

6.12. W ciągu arytmetycznym (a_n) trzeci wyraz jest równy liczbie $\frac{\pi}{2}$, a szósty wyraz liczbie π.

a) Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).

b) Oblicz wartość wyrażenia $\cos a_5 - \sin a_7$.

c) Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg} S_{12}$, gdzie S_{12} jest sumą dwunastu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

6.13. Wyznacz x tak, aby liczby $x+3,\ x^2+3x,\ 11x-2$ były w podanej kolejności wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego o wyrazach całkowitych.

6.14. Ciąg geometryczny (a_n) nie jest ciągiem monotonicznym. Drugi wyraz tego ciągu jest równy –80, a czwarty wyraz jest od niego o 60 większy. Oblicz, ile początkowych wyrazów ciągu (a_n) należy dodać, aby suma tych wyrazów była równa $106\frac{7}{8}$.

6.15. Dla jakich x liczby $\frac{1}{2\operatorname{tg}x}$, $\cos x$, $\sin x$ w podanej kolejności są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

6.16. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{2n - 1}$.

a) Uzasadnij, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są liczbami naturalnymi.

b) Podaj dwa kolejne wyrazy ciągu (a_n), których różnica sześcianów jest równa -1261.

6.17. Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = \log_p a_n$, gdzie $p > 0$ i $p \neq 1$, jest ciągiem arytmetycznym.

6.18. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Wiedząc, że $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_5}$, wyznacz ten ciąg.

6.19. Wyznacz ciąg geometryczny o wyrazach różnych od zera, w którym każdy wyraz, począwszy od wyrazu trzeciego, jest równy średniej arytmetycznej dwóch poprzednich wyrazów.

6.20. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym $a_1 = 6$, $a_3 = 24$.

a) Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).

b) Oblicz x, jeśli wiadomo, że liczby $a_2 + 1$, $\frac{a_5}{4}$, $3x + 2$, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

6.21. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$.

6.22. Długości boków trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Jaki warunek spełnia iloraz q tego ciągu?

6.23. Dziesiąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego jest równy 10. Oblicz iloczyn dziewiętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu.

6.24. Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 dodatnich wyrazów. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych oraz $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots + \log a_{100} = 100$. Oblicz a_1.

Ciągi określone wzorem rekurencyjnym

6.25. Ciąg liczbowy (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2^n - 1$. Wykaż, że $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

6.26. Wypisz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) określonego wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = (a_n)^2 - 4, \text{ gdy } n \geq 1, \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}+1}{2}, \text{ gdy } n \geq 2, \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}\right), \text{ gdy } n \geq 2, \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_n = \dfrac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}, \text{ gdy } n \geq 3, \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 3a_{n-1} + (-1)^n, \text{ gdy } n \geq 2, \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} a_1 = \dfrac{\pi}{6} \\ a_{n+1} = 2\pi \cdot \sin(a_n), \text{ gdy } n \geq 1. \end{cases}$

6.27. Sprawdź, czy $a_5 = b_5$, gdy ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{3n}{n+1} \cdot a_n, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}$, a ciąg (b_n) ma wzór $b_n = \dfrac{3^{n-1}}{n}$, gdy $n \geq 1$.

6.28. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \dfrac{n^2+n}{2}$, gdy $n \in N^+$. Określ ten ciąg za pomocą wzoru rekurencyjnego.

6.29. Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} - \dfrac{1}{(n-1)n} \end{cases}$, gdy $n \geq 2$, oraz wskaż wyrazy, które są mniejsze od 0,01.

6.30. Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases}$, gdy $n \geq 1$, oraz wskaż wyraz, który jest równy 34.

6.31. Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = \sin\alpha \\ a_{n+1} = a_n + \cos\alpha \end{cases}$, gdy $n \geq 1$. Uzasadnij, że jeżeli $a_3 = 2$, to $a_n = \dfrac{3}{5}n + \dfrac{1}{5}$ lub $a_n = n - 1$.

6.32. Wykaż, że ciąg (a_n) zdefiniowany rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 10, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Granica ciągu

6.33. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \frac{3n+5}{2n+1}$, b) $a_n = \frac{5n^2-2n+6}{4n-n^2}$, c) $a_n = 3-\frac{2n}{n+1}$,

d) $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$, e) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$, f) $a_n = \sqrt{\frac{8n^2}{n^2+1}}$.

6.34. Oblicz (o ile istnieje) granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = 4n^2-2n+1$, b) $a_n = 1-\frac{1}{2}n^5$, c) $a_n = \frac{3n^2+n-4}{n+2}$,

d) $a_n = \frac{4-2n^3}{n^2+1}$, e) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$, f) $a_n = (-2)^n$.

6.35. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{2n^2+n+5}$, b) $a_n = \frac{1+3+5+\ldots+2n-1}{1-n^2}$,

c) $a_n = \frac{2+4+6+\ldots+2n}{5n^3+4n+3}$, d) $a_n = \frac{1+3+3^2+\ldots+3^n}{1+5+5^2+\ldots+5^n}$.

6.36. Oblicz granicę ciągu:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+7}{8n+4}+\frac{3n-4}{6n+5}\right)$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(1-n)(2-n)(3-n)(n^2-1)}{5n^3+6n^5-3}$.

6.37. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \sqrt{n^2+n+4}$, b) $a_n = \frac{\sqrt{4n^2+3n+7}}{3-5n}$, c) $a_n = \sqrt[3]{\frac{8n^6+1}{n^6-2}}$,

d) $a_n = \sqrt{n^2+4n+3}-n$, e) $a_n = \sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}$, f) $a_n = \sqrt{n^6+1}-n^3+2$.

6.38. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \frac{2^n+5^n}{2^n-5^n}$, b) $a_n = \frac{3^n-4^n}{5^n+4^n}$, c) $a_n = \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3\cdot 2^n+3^{n+1}}$, d) $a_n = \frac{5\cdot 4^{n-2}+3\cdot 2^{n+1}}{2\cdot 4^{n+1}-6\cdot 2^n}$.

6.39. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \left(\frac{2^{2n}+2\cdot 3^n-1}{4^n+3^n+2}\right)^5$, b) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}}$, c) $a_n = \frac{4^{3n-2}+2}{8^{2n}-5}$,

d) $a_n=\dfrac{1+6+6^2+\ldots+6^{n-1}}{1-36^n}$, **e)** $a_n=\dfrac{n!\cdot(n+1)!}{(n-1)!\cdot(n+2)!}$,

f) $a_n=\dfrac{n+3n+5n+\ldots+(2n-1)n}{n^3+3}$, **g)** $a_n=\dfrac{n+1}{n^2}\cdot\dfrac{n+5n+9n+13n+\ldots+\left(4n^2-3n\right)}{n+2}$.

6.40. Zbadaj, czy ciąg (a_n) jest zbieżny, gdy:

a) $a_n=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, **b)** $a_n=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$,

c) $a_n=\dfrac{7+49+343+\ldots+7^n}{3\cdot 7^n-2}$, **d)** $a_n=\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$, gdy $b_n=5+10+20+\ldots+5\cdot 2^{n-1}$.

6.41. Określ, dla jakich wartości parametru p granicą ciągu a_n jest liczba q, gdy:

a) $a_n=\dfrac{p\cdot n-2}{(p+1)\cdot n+1}$, $q=\dfrac{1}{2}$, gdy $p\neq -1$, **b)** $a_n=\dfrac{(p+7)\cdot n^2+n}{5-7\cdot pn^2}$, $q=0$, gdy $p\neq 0$,

c) $a_n=\dfrac{\left(p^2+3p-6\right)\cdot n^3+n^2+5}{3-p\cdot n^3}$, $q=2$, gdy $p\neq 0$.

6.42. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) określony wzorem:

a) $a_n=\dfrac{3n+2}{(k+1)n-1}$ ma granicę równą liczbie -1,

b) $a_n=\dfrac{3n+2}{(k+1)n-1}$ jest rozbieżny do $-\infty$,

c) $a_n=\dfrac{n^k}{2+4+6+\ldots+2n}$, gdzie $k\in N$, jest rozbieżny do $+\infty$?

6.43. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określona jest wzorem $S_n=-3n^2+6n$.

a) Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).

b) Oblicz sumę stu początkowych wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych.

c) Oblicz $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n^2}{n^2-a_n}$.

6.44. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) czwarty wyraz jest równy 4007, a siódmy 7004. O nieskończonym ciągu geometrycznym (b_n) wiadomo, że jest monotoniczny, jego trzeci wyraz jest równy 1,25 i suma trzech początkowych jego wyrazów jest równa 8,75. Z wyrazów ciągów (a_n) i (b_n) utworzono nowy ciąg (c_n), którego n-ty wyraz określony jest wzorem $c_n=\dfrac{2a_n}{n(b_n+1)}$. Oblicz granicę ciągu (c_n).

6.45. Spośród ciągów, których n-ty wyraz określony jest wzorem $a_n = \frac{(k^2-2k-3)n+1}{-n}$, wybierz ten, który ma granicę równą liczbie 4.

Szereg geometryczny

6.46. Oblicz granicę S nieskończonego ciągu geometrycznego (S_n) o ilorazie q, gdy:

a) $a_1 = -2,\ q = \frac{1}{2}$, **b)** $a_1 = 10,\ q = -\frac{1}{3}$.

6.47. Oblicz sumę S szeregu geometrycznego:

a) $2\sqrt{3} + 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \ldots$, **b)** $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} + \ldots$, **c)** $\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \ldots$

6.48. Oblicz $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$, gdy:

a) $S_n = 20 + 2 + 0{,}2 + \ldots + \frac{2}{10^{n-2}}$, **b)** $S_n = 1{,}25 + 0{,}3125 + 0{,}078125 + \ldots + \frac{5}{4^n}$.

6.49. Suma $1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \ldots$ jest szeregiem geometrycznym.

a) Oblicz sumę szeregu, gdy $x = \frac{\pi}{6}$.

b) Wyznacz w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ wartości x, dla których szereg ma granicę właściwą.

c) Wyznacz w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ takie wartości x, dla których szereg ma sumę równą 4.

6.50. Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{2}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

6.51. Podaj warunek, dla którego lewa strona równania jest sumą nieskończonego zbieżnego ciągu geometrycznego. Rozwiąż to równanie.

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 4x$, **b)** $\frac{9}{4} + \frac{3}{2}x + x^2 + \ldots = 3$,

c) $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{4}{3}$, **d)** $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots = 40\frac{1}{2}$,

e) $\frac{2}{x-1} + \left(\frac{2}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{2}{x-1}\right)^3 + \ldots = x - 2$, **f)** $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \ldots = x - 1$.

6.52. Rozwiąż nierówność, której lewa strona jest sumą nieskończonego zbieżnego ciągu geometrycznego.

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots \geq \frac{2x}{x+3}$,

b) $x^2+x^3+x^4+\ldots > -1-x$,

c) $x+1+(x+1)^2+(x+1)^3+\ldots < 3$,

d) $\frac{x}{x+2}+\left(\frac{x}{x+2}\right)^2+\left(\frac{x}{x+2}\right)^3+\ldots \leq 3x$.

6.53. Wykaż, że $\dfrac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots}{0,(1)+\sin(690^\circ)}=-\frac{27}{14}$.

6.54. Wykaż, że jeśli w ciągu geometrycznym iloraz q spełnia warunek $|q|<1$, to

$$\left(1+q+q^2+q^3+\ldots\right)\cdot\left(1-q+q^2-q^3+\ldots\right)=\frac{1}{1-q^2}.$$

6.55. W trójkąt równoboczny T_1 o boku długości a, wpisujemy trójkąt równoboczny T_2 w taki sposób, że każdy wierzchołek trójkąta T_2 jest środkiem boku trójkąta T_1. W trójkąt T_2 wpisujemy w analogiczny sposób trójkąt T_3 itd.

a) Oblicz pole trójkąta T_5.

b) Wykaż, że suma pól trójkątów T_n jest zbieżnym szeregiem geometrycznym. Oblicz sumę tego szeregu.

6.56. Suma trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 6, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{16}{3}$. Dla jakich liczb naturalnych n jest spełniona nierówność $|S-S_n|<\frac{1}{96}$?

6.57. Dla jakich wartości parametru k granica ciągu (a_n) określonego wzorem

$a_n=\dfrac{1+k_n^2}{1+2kn+\left(1+k^2\right)n^2}$ ma wartość największą?

6.58. Dla jakich wartości parametru m suma nieskończonego ciągu geometrycznego

$\frac{1}{m+2}$, $m-2$, m^3-2m^2-4m+8, ... jest skończona? Oblicz wartość tej sumy.

6.59. Wyznacz ekstrema funkcji określonej wzorem $f(x)=2x^2+2x^3+2x^4+\ldots$, która jest sumą zbieżnego ciągu geometrycznego.

6.60. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji f określonej wzorem

$f(x)=1+\left(x^2-5x+5\right)+\left(x^2-5x+5\right)^2+\left(x^2-5x+5\right)^3+\ldots$, gdzie prawa strona wzoru jest sumą zbieżnego ciągu geometrycznego.