

Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

3.242. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , $m \in \mathbf{R}$, dla których dane równanie ma dwa rozwiązania.

a) $(m-2)x^2 + (m+5)x - m - 1 = 0$ b) $(m+2)x^2 - 2x + m + 2 = 0$

Odp. a) $m \in \mathbf{R} - \{2\}$ b) $m \in (-3, -2) \cup (-2, -1)$

3.243. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbf{R}$, dla których równanie:

a) $8(k^2 - 1)x^2 + (8k - 8)x + 1 = 0$ nie ma rozwiązań,

b) $(k - 3)x^2 + (k - 2)x + 1 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie,

c) $(k - 1)x^2 - (k + 1)x + k + 1 = 0$ ma rozwiązanie,

d) $(k^2 - 3k + 2)x^2 + 3(k - 2)x + 4,5 = 0$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Odp. a) $k \in \langle 1, 3 \rangle$ b) $k = 3$ lub $k = 4$ c) $k \in \left\langle -1, 1\frac{2}{3} \right\rangle$ d) $k \in (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup \langle 2, +\infty \rangle$

3.244. Wyznacz liczbę rozwiązań równania ze względu na wartość parametru p , $p \in \mathbf{R}$. Napisz wzór funkcji g , która każdej rzeczywistej wartości parametru p przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania. Naskicuj wykres funkcji g .

a) $(p - 5)x^2 - 4px + p - 2 = 0$

b) $(2p - 3)x^2 + 4px + p - 1 = 0$

Odp. a) $g(p) = \begin{cases} 2, & \text{jeśli } p \in \left(-\infty, -3\frac{1}{3}\right) \cup (1, 5) \cup (5, +\infty) \\ 1, & \text{jeśli } p \in \left\{-3\frac{1}{3}, 1, 5\right\} \\ 0, & \text{jeśli } p \in \left(-3\frac{1}{3}, 1\right) \end{cases}$

$$b) g(p) = \begin{cases} 2, & \text{jeśli } p \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right) \cup \left(1\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ 1, & \text{jeśli } p \in \left\{-3, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\} \\ 0, & \text{jeśli } p \in \left(-3, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

3.245. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , $m \in \mathbf{R}$, dla których dana nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x .

a) $-x^2 + (m+2)x + 8m - 1 < 0$

b) $2x^2 + (3+m)x + 2 \geq 0$

c) $(4-m)x^2 - 3x + m + 4 > 0$

d) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \leq 0$

Odp. a) $m \in (-36, 0)$ b) $m \in \langle -7, 1 \rangle$ c) $m \in \left(\frac{-\sqrt{55}}{2}, \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$ d) $m \in (-\infty, -2)$

3.246. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , $k \in \mathbf{R}$, dla których dziedyną funkcji f jest zbiór \mathbf{R} , jeśli:

a) $f(x) = \sqrt{kx^2 + 4kx + k - 3}$

b) $f(x) = \sqrt{(k^2 + k - 6)x^2 + (k - 2)x + 1}$

Odp. a) $k \in (0, 1)$ b) $k \in \left(-\infty, -4\frac{2}{3}\right) \cup \langle 2, +\infty \rangle$

3.247. Dla jakich wartości parametru k , $k \in \mathbf{R}$, wartość funkcji

$f(x) = (2k+1)x^2 + (k-1)x + 3k$ jest mniejsza od wartości funkcji $g(x) = (1-k)x + 3$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x ?

Odp. $k \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right)$

D 3.248. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej k prawdziwa jest nierówność $2x^2 - kx + 2 > 3x - k^2$.

D 3.249. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 2mx + m^2 \geq 6x + 3m - 9$.