733. Rozwiąż nierówność $1+\log_2(\sin 2x)+\log_2^2(\sin 2x)+\ldots<0,(6)$ w zbiorze $\langle 0;\ 2\pi\rangle$, gdzie lewa strona nierówności jest szeregiem geometrycznym zbieżnym.

734. Dla jakich wartości parametru a równanie $\frac{\cos x}{2}+\frac{\cos^2 x}{4}+\frac{\cos^3 x}{8}+\ldots=a^2-2$, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego, ma rozwiązanie?

Egzamin dojrzałości (LO – profil podstawowy) w woj. warszawskim w roku 1994

735. Dla jakich wartości parametru a równanie $a+a\sin x+a\sin^2 x+a\sin^3 x+\ldots=\sin x-0{,}5$, gdzie lewa strona równania jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego, ma rozwiązania rzeczywiste?

Egzamin dojrzałości (LO – profil mat-fiz) w woj. warszawskim w roku 1990

736.* Wyznacz te wartości parametru m, dla których równanie $x-x^3+x^5-\ldots=m+m^2+m^3+\ldots$ ma rozwiązania, jeżeli wyrażenia po obu stronach równania są szeregami geometrycznymi zbieżnymi.

737. Wartości funkcji $f\colon D\to\mathbb{R}$ spełniają dla każdego $x\in D$ następujące równanie:
$1+f(x)+(f(x))^2+(f(x))^3+\ldots=\frac{1}{2x^2-3x}$, gdzie lewa strona równania jest dla każdej liczby $x\in D$ szeregiem geometrycznym zbieżnym. Wyznacz zbiór D i wzór funkcji f.

ZADANIA RÓŻNE

738. R Oblicz sumę wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych.

739. W Oblicz sumę tych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 3 i są mniejsze od 300.

740. Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy 1, zaś n-ty wyraz, gdzie $n>1$, równy jest sumie n kolejnych liczb naturalnych, z których najmniejszą jest n. Który wyraz ciągu (a_n) jest równy 70?

741. Mamy na stole dwa jednakowe naczynia, każde o pojemności 77 litrów. Jedno jest pełne, drugie zaś próżne. Z pełnego naczynia wypływają w pierwszej sekundzie 4 litry cieczy, a w każdej następnej o 0,2 litra mniej niż w poprzedniej. Jednocześnie do drugiego naczynia wlewa się w pierwszej sekundzie 1,5 litra, a w każdej następnej o 0,5 litra więcej niż w poprzedniej. Obliczyć, po ilu sekundach poziomy cieczy w obu naczyniach wyrównają się.

Egzamin wstępny do Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Katowicach (kierunek chemia) w roku 1963

742. W skarbcu królewskim było k monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucał o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie ze skarbca król zabierał w południe każdego dnia 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę k, dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości k oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.

CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2009

743. Uczniowie pewnej szkoły zobowiązali się z okazji XX-lecia Polski Ludowej posadzić przy drodze 1200 drzewek w pewnym terminie. Po przepracowaniu jednego dnia postanowili skrócić czas pracy o 2 dni w ten sposób, że każdego następnego dnia posadzą o 20 drzewek więcej niż poprzedniego. Obliczyć, w ciągu ilu dni uczniowie wykonali zobowiązanie i o ile procent skrócili czas pracy w stosunku do planowanego terminu.

Egzamin dojrzałości w woj. bydgoskim w roku 1964

744. W Rozwiąż równanie $\frac{x}{3}+\frac{x+1}{3}+\frac{x+2}{3}+\ldots+\frac{x+200}{3}=2010$.

745. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n=\frac{5n+6}{10(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$.

a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

b) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) Podaj największą liczbę a i najmniejszą liczbę b takie, że dla każdego n spełniony jest warunek $a\leq a_n\leq b$.

CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2006

746. W Dla jakich wartości x nieskończony ciąg geometryczny $1, x^2-3x+1, (x^2-3x+1)^2, \ldots$ jest zbieżny?

747. Oblicz: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{5+7+9+\ldots+(2n+3)}$.

CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2005

748. W Wyznacz największą wartość parametru p, dla której granica ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n=\frac{(p^3-2p+1)(4n^6-2n+1)}{(2n^2-2n+1)^3}$ jest równa 1.

749. R Rozwiąż równanie $n+(n+1)+(n+2)+\ldots+3n+(3n+1)=232$, gdzie $n\in \mathbb{C}_+$.

750. Drugi wyraz nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) równy jest 1. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu wiedząc, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{1-2n-3n^2}=\frac{1}{3}$.

751. **(0–4)** O ciągu (x_n) dla $n\geq 1$ wiadomo, że:

(a) ciąg (a_n) określony wzorem $a_n=3^{x_n}$ dla $n\geq 1$ jest geometryczny o ilorazie $q=27$.

(b) $x_1+x_2+\ldots+x_{10}=145$.

Oblicz x_1.

CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2011

752. R Liczby $\sin\alpha$, 0,2, $\cos\alpha$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Oblicz iloczyn $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

753. Liczby $\sin\alpha$, 0,2, $\cos\alpha$, gdzie $\alpha\in(\pi; \frac{3}{2}\pi)$, tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Oblicz sumę $\sin\alpha+\cos\alpha$.

754. R Oblicz sumę wszystkich miejsc zerowych funkcji $f(x)=\cos x$ należących do przedziału $\langle 0; 50\pi)$.

755. W Ciąg (a_n) dany jest wzorem $a_n = \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)$. Oblicz sumę $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 50a_{50}$.

756. Ciąg $(x-3,\ x+3,\ 6x+2,\ \ldots)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2009

757. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $3x^2 - x + m = 0$, gdzie m jest pewną ujemną liczbą rzeczywistą. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = (x_1 + x_2)^n$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu.

758. R Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej $k > -2$ sumę wszystkich liczb całkowitych spełniającą nierówność $x^2 - 3kx + 2k^2 - k - 1 \leq 0$, gdzie x jest niewiadomą. Określ funkcję f wzorem.

759. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \left(\frac{3-p}{3+p}\right)^{2n-3}$, gdzie $p \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

a) Uzasadnij, że (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

b) Wyznacz te wartości parametru p, dla których ciąg (a_n) jest malejący.

760.* Dana jest następująca tablica liczb naturalnych:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ n & 2n & 3n & \ldots & n^2 \end{array}$$

Oblicz n, jeżeli suma wszystkich liczb w tej tablicy równa się 14400.

Egzamin wstępny na UW (Wydział Nauk Ekonomicznych) w roku 1994

761.* W Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 4n - 13$. Znajdź wszystkie liczby naturalne k takie, że wyrazy $a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2}$ są liczbami pierwszymi.

718. $m \in (-20\sqrt{2};\ 20\sqrt{2})$.

Rozwiązanie. a, $a+2r$, $a+10r$ – pierwszy, trzeci i jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy $r \neq 0$. Liczby te są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, więc $(a+2r)^2 = a(a+10r)$. Stąd otrzymujemy $2r = 3a$. Wyznaczamy iloraz ciągu geometrycznego: $q = \frac{a+2r}{a} = \frac{a+3a}{a} = 4$. Najmniejsza wartość funkcji f: $y_W = \frac{-\Delta}{4\cdot 1} = -\frac{m^2-4\cdot 4}{4} = -\frac{1}{4}m^2+4$. Nierówność $-\frac{1}{4}m^2+4 > -196$ spełniają liczby $m \in (-20\sqrt{2};\ 20\sqrt{2})$.

720. Suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest nie mniejsza od sumy wyrazów ciągu geometrycznego. Sumy są równe, gdy ciągi są stałe.

Rozwiązanie. a, x, b – ciąg arytmetyczny, a, y, b – ciąg geometryczny. Aby porównać sumy wyrazów obu ciągów, musimy porównać ich środkowe wyrazy. Wiemy, że $x = \frac{a+b}{2}$ i $y^2 = ab$. Liczby a, b, y są dodatnie, więc $y = \sqrt{ab}$.

Badamy znak różnicy $x-y$: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$. $x - y \geq 0$, więc $x \geq y$. Zatem suma ciągu arytmetycznego jest niemniejsza niż suma ciągu geometrycznego, przy czym sumy te są równe wtedy, gdy $a = b$, czyli, gdy ciągi są stałe.

721. $\frac{9}{4}$.

723. $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie. a – pierwszy wyraz ciągu, q – iloraz ciągu. Sześciany wyrazów ciągu tworzą także ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie a^3 i ilorazie q^3. Sumy wszystkich wyrazów obu ciągów istnieją, więc $q \in (-1;\ 1)$ i $q^3 \in (-1;\ 1)$, czyli $q \in (-1;\ 1)$.
Wiemy, że $\frac{a}{1-q} = 3$ i $\frac{a^3}{1-q^3} = \frac{108}{13}$. Stąd $a = 3(1-q)$ i $\frac{27\cdot(1-q)^3}{(1-q)(1+q+q^2)} = \frac{108}{13}$. Rozwiązujemy równanie $\frac{27\cdot(1-q)^3}{(1-q)(1+q+q^2)} = \frac{108}{13}$ dla $q \in (-1;\ 1)$: $\frac{(1-q)^2}{1+q+q^2} = \frac{4}{13} \Leftrightarrow 13(1-2q+q^2) = 4(1+q+q^2) \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$. $a = 3(1-\frac{1}{3}) = 2$.

724. $\frac{1}{4}$.

725. $x = 6$.

726. $x \in (-\infty;\ -3) \cup \langle 0;\ 1)$.

727. Zbiór wartości: $(-\frac{1}{2};\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

728. $k \in (2{,}5;\ 3) \cup (3;\ 4)$.

729. $x = 2$.

730. $x = 10^{\frac{2}{3}}$.

731. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in C$.

732. $x \in \langle 0;\ \frac{\pi}{6}\rangle \cup (\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{6}\rangle \cup (\frac{7\pi}{4};\ 2\pi\rangle$.

733. $x \in (\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{8}) \cup (\frac{3\pi}{8};\ \frac{5\pi}{12}) \cup (\frac{13\pi}{12};\ \frac{9\pi}{8}) \cup (\frac{11\pi}{8};\ \frac{17\pi}{12})$.

734. $a \in \left\langle -\sqrt{3};\ -\sqrt{\frac{5}{3}} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{\frac{5}{3}};\ \sqrt{3} \right\rangle$.

735. $-3 < a \leq \frac{1}{16}$.

736. $m \in (-1;\ \frac{1}{3})$.

737. $f(x) = -2x^2+3x+1$, $D = (-\frac{1}{2};0) \cup (\frac{3}{2};2)$.

738. 2475.

Rozwiązanie. Jest 45 dwucyfrowych liczb nieparzystych (*jest 50 liczb nieparzystych mniejszych od 100, w tym 5 liczb nieparzystych jednocyfrowych*), najmniejszą z nich jest 11, a największą 99. Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny, zatem $S_{45} = \frac{11+99}{2}\cdot 45 = 55\cdot 45 = 2475$.

739. 11 325.

Wskazówka. Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 4, w którym pierwszy wyraz równy jest 3.

740. Siódmy.

741. Po jedenastu sekundach.

742. Najmniejszą liczbą k jest 170; w trzynastym dniu.

743. W ciągu 6 dni; o 25%.

744. $x = -70$.

Wskazówka. Dla każdej liczby rzeczywistej x ciąg $\frac{x}{3}, \frac{x+1}{3}, \frac{x+3}{3}, \ldots, \frac{x+200}{3}$ jest ciągiem arytmetycznym.

745. **a)** Ciąg jest malejący; **b)** 0,5; **c)** $a = \frac{11}{20}$, $b = 0{,}5$.

746. Dla $x \in \langle 0;\ 1) \cup (2;\ 3\rangle$.

Wskazówka. Dany ciąg geometryczny ma granicę (*jest zbieżny*), jeżeli $-1 < x^2 - 3x + 1 \leq 1$.

747. $\frac{3}{2}$.

748. $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Wskazówka. $(2n^2-2n+1)^3=[n^2(2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})]^3=n^6(2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})^3$.

749. $n=7$.

Rozwiązanie. Liczby $n, n+1, n+2, \ldots, 3n, 3n+1$ tworzą ciąg arytmetyczny. Liczba wyrazów tego ciągu jest równa $2n+2$. Zatem $n+(n+1)+(n+2)+\ldots+3n+(3n+1)=\frac{n+3n+1}{2}\cdot(2n+2)=4n^2+5n+1=232$. Stąd otrzymujemy $n=7$.

750. $a_1=3$.

751. $x_1=1$.

752. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-0{,}42$.

Rozwiązanie. Dane liczby tworzą ciąg arytmetyczny, więc $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}=\frac{1}{5}$. Stąd $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{4}{25}$. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, zatem $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-0{,}42$.

753. $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

754. 1250π.

Rozwiązanie. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in\mathbf{C}$, więc kolejne miejsca zerowe są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Do przedziału $\langle 0; 50\pi\rangle$ należy pięćdziesiąt miejsc zerowych funkcji f, najmniejszym z nich jest liczba $\frac{\pi}{2}$, a największym $\frac{\pi}{2}+49\pi$. Obliczamy sumę miejsc zerowych należących do przedziału $\langle 0; 50\pi\rangle$: $S_{50}=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+49\pi}{2}\cdot 50=25\pi\cdot 50=1250\pi$.

755. 25.

Wskazówka. Jeśli n jest liczbą parzystą, to $\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)=\sin\frac{\pi}{2}$, Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)=\sin\frac{3\pi}{2}$.

756. Iloraz ciągu równy jest 4.

757. $\frac{1}{2}$.

758. $f(k)=1{,}5k(k+3)$.

Rozwiązanie. Znajdujemy pierwiastki trójmianu $x^2-3kx+2k^2-k-1$: $\Delta=9k^2-4\cdot(2k^2-k-1)=k^2+4k+4=(k+2)^2$, $k>-2$, więc $\Delta>0$ i $\sqrt{\Delta}=k+2$, $x_1=k-1$, $x_2=2k+1$. $x_1<x_2$ dla każdego $k>-2$, więc nierówność $x^2-3kx+2k^2-k-1\le 0$ spełniają liczby $x\in\langle k-1; 2k+1\rangle$. Liczbami całkowitymi należącymi do przedziału są liczby $k-1, k, \ldots, 2k, 2k+1$. Mamy $k+3$ liczby, które tworzą ciąg arytmetyczny. Zatem $(k-1)+k+,\ldots,+2k+(2k+1)=\frac{k-1+2k+1}{2}\cdot(k+3)=\frac{3}{2}\cdot k(k+3)$. Funkcja f określona jest wzorem $f(k)=1{,}5k(k+3)$.

759. **b)** $p\in(-\infty; -3)\cup(0; 3)$.

760. $n=15$.

761. $k=4$.

Wskazówka. (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 4, którego wszystkie wyrazy są liczbami całkowitymi. Wykaż, że wśród trzech kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest wyraz podzielny przez 3.