11.5. Rozwiąż równanie:

a) $\binom{n}{2}=n$, b) $\binom{n}{2}+\binom{n+3}{1}=6$, c) $\binom{n}{n-2}-\binom{n}{1}=5\binom{n}{0}$.

11.6. Rozwiąż równanie:

a) $2C_n^2=C_{n+1}^3$, gdzie C_n^k oznacza liczbę k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego,

b) $20P_{n-2}=P_n$, gdzie P_n oznacza liczbę permutacji zbioru n-elementowego,

c) $2V_n^2-3V_n^1=42$, gdzie V_n^k oznacza liczbę k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego,

d) $P_{n-3}\cdot V_n^3=20P_{n-2}$.

11.7. Określ, dla jakiej liczby naturalnej n średnia arytmetyczna liczb $\binom{n}{2}$ i $\binom{n}{n-1}$ nie jest większa niż 3.

11.8. Rozwiąż nierówność:

a) $\binom{n}{4}>\binom{n}{5}$, b) $\binom{n}{n-4}<\binom{n}{n-3}$.

11.9. Określ, dla jakiej liczby naturalnej n spełnione są jednocześnie nierówności $\binom{n}{8}>\binom{n}{7}$ oraz $\binom{n}{8}>\binom{n}{9}$.

11.10. Dorota dostała od Basi na urodziny piątego słonia do swojej kolekcji. Stwierdziła, że zmieniając codziennie kolejność ustawienia słoni na półce, otrzyma tyle różnych możliwości, że każda z nich powtórzy się do następnych urodzin tylko trzy razy. Czy miała rację? Odpowiedź uzasadnij.

11.11. Właściciel aktówki zapomniał szyfru do jej zamka. Szyfr ten jest liczbą ośmiocyfrową. Właściciel pamięta, że w haśle użył wszystkich cyfr występujących w dacie swojego urodzenia (23.06.1954 r.), przy czym początkowe cztery cyfry szyfru powstały z cyfr tworzących rok urodzenia. Oblicz, ile jest wszystkich możliwości sprawdzenia szyfru otwierającego zamek.

11.12. Oblicz, ile można utworzyć z cyfr 0, 1, 2, 3:

a) liczb jednocyfrowych,

b) liczb dwucyfrowych, których cyfry mogą się powtarzać,

c) liczb trzycyfrowych o niepowtarzających się cyfrach,

d) liczb czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach,

e) liczb dziesięciocyfrowych, w których suma cyfr jest równa 3.

11.13. Kod ANSI stosowany w oprogramowaniu komputerowym przyporządkowuje znakom graficznym ośmiocyfrowe ciągi złożone z cyfr 0 lub 1. Ile różnych znaków graficznych można zakodować stosując ten kod?

11.14. Pan Kowalski założył w swojej firmie zamek z czterocyfrowym kodem. Aby mógł łatwiej zapamiętać wybrał taki kod, w którym suma dwóch pierwszych cyfr jest równa 12, a suma dwóch ostatnich cyfr 10. Ile miał możliwości wyboru kodu?

11.15. W spotkaniach piłkarskiej rundy wiosennej, liczącej 16 zespołów, gra każdy z każdym. Każdy mecz sędziuje trzech arbitrów. Oblicz koszt sędziowania spotkań w rundzie, jeżeli każdy z arbitrów otrzymuje 100 zł za jeden mecz.

11.16. W pewnym mieście przebudowano centralę telefoniczną z sześciocyfrowymi numerami wprowadzając numery siedmiocyfrowe. Przyjęto, że cyfry w numerze mogą powtarzać się dowolnie. Oblicz, ilu abonentów może obsłużyć nowa centrala, jeżeli wykluczymy wszystkie numery zaczynające się od zera a dołączymy numery telefoniczne trzycyfrowe, zaczynające się cyfrą 9.

11.17. W turnieju szachowym rozegrano 66 partii. Ilu było graczy, jeżeli każdy szachista grał z każdym jeden raz?

11.18. Dwaj uczestnicy turnieju szachowego rozegrali po cztery partie każdy i wycofali się z dalszej gry. Pozostali zawodnicy kontynuowali rozgrywki. Podczas turnieju rozegrano 86 partii. Ilu uczestników rozpoczęło turniej szachowy?

11.19. Zaprzyjaźniona grupa liczy 9 osób.

a) Spotykając się ze sobą każdy wita się z każdym. Ile będzie różnych powitań?

b) W okresie świątecznym wszyscy przesyłają do siebie nawzajem życzenia. Ile sms-ów świątecznych prześlą?

11.20. Wśród 20 zdjęć jest 9 zdjęć portretowych Kasi. Wyciągamy losowo 3 zdjęcia. Oblicz, ile jest możliwości wylosowania:

a) jednego portretu Kasi, **b)** dwóch portretów Kasi, **c)** trzech portretów Kasi.

11.21. Dla sześciu osób, będących w podróży, należy zarezerwować pokoje dwuosobowe lub trzyosobowe. Na ile sposobów można dokonać rezerwacji pokoi, jeżeli w motelu jest 6 pokoi trzyosobowych i 10 pokoi dwuosobowych?

11.22. Na egzaminie zdający losuje 4 pytania. Oblicz, ile jest możliwości, że odpowie on pozytywnie na co najmniej 3 pytania, jeżeli umie odpowiedzieć tylko na 20 spośród dwudziestu pięciu przygotowanych pytań egzaminacyjnych.

11.23. Na okręgu zaznaczono pięć różnych punktów. Oblicz, ile można narysować różnych wielokątów wypukłych, których wierzchołkami są zaznaczone punkty.

11.24. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać.

11.25. Dwie proste są równoległe i niepokrywające się. Na jednej z nich obrano 4 różne punkty, a na drugiej 6 różnych punktów. Oblicz, ile istnieje:

a) trójkątów, **b)** czworokątów,

których wierzchołkami są te punkty.

11.26. Uzasadnij, że istnieje dokładnie 1908 nieparzystych liczb czterocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występuje co najmniej jedna siódemka.

11.27. Wiedząc, że w zapisie dziesiętnym liczby nie występuje cyfra zero i występuje tylko jedna cyfra parzysta, oblicz, ile jest takich liczb:

a) sześciocyfrowych, **b)** dziesięciocyfrowych, **c)** stucyfrowych.

11.28. Wiedząc, że w zapisie dziesiętnym liczby występuje tylko jedna cyfra parzysta, oblicz, ile jest takich liczb:

a) sześciocyfrowych, **b)** dziesięciocyfrowych, **c)** stucyfrowych.

11.29. Oblicz, ile jest liczb naturalnych stucyfrowych, których suma cyfr jest równa:

a) 1, **b)** 2, **c)** 3, **d)** 4.

11.30. Oblicz, ile jest liczb naturalnych dziesięciocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

11.6. **a)** $n=5$, **b)** $n=5$, **c)** $n=6$, **d)** $n=5$.

Wskazówka: **a)** Korzystając z wzoru $C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, gdzie $k\le n$, $n\in N$ i $k\in N$, otrzymujemy równanie $2\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$, gdy $n\ge 2$, czyli $2\cdot\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!}$, skąd $n(n-1)(5-n)=0$.

b) Korzystając z wzoru $P_n=n!$, gdzie $n\in N$, otrzymujemy równanie $20(n-2)!=n!$, gdy $n\ge 2$, czyli $20(n-2)!-(n-2)!(n-1)n=0$, skąd $(n-2)!\left(20-n^2+n\right)=0$, czyli $(n-2)!(5-n)(n+4)=0$.

c) Korzystając z wzoru $V_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$, gdzie $k\le n$, $n\in N$ i $k\in N$, otrzymujemy równanie $2\frac{n!}{(n-2)!}-3\frac{n!}{(n-1)!}=42$, gdy $n\ge 2$, skąd $2n^2-5n-42=0$.

11.7. Liczby 2 i 3. *Wskazówka:* Z warunków zadania mamy $\frac{1}{2}\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{n-1}\right]\le 3$, gdzie $n\ge 2$, skąd $\begin{cases} n^2+n-12\le 0 \\ n\ge 2 \end{cases}$.

11.8. **a)** $n\in\{5,6,7,8\}$, **b)** $n\in\{4,5,6\}$. *Wskazówka:* **a)** Zakładamy, że $n\ge 5$.

Z warunków zadania $\frac{n!}{4!(n-4)!}>\frac{n!}{5!(n-5)!}$, gdzie $n\ge 5$, skąd $\frac{n!}{4!(n-5)!(n-4)}>\frac{n!}{4!\cdot 5(n-5)!}$, czyli $\frac{1}{n-4}>\frac{1}{5}$, więc $n<9$ i $n\ge 5$.

11.9. $n=16$. *Wskazówka:* Z warunków zadania $\frac{\binom{n}{8}}{\binom{n}{7}}>1$ i $\frac{\binom{n}{9}}{\binom{n}{8}}<1$, czyli $\begin{cases} \frac{n-7}{8}>1 \\ \frac{n-8}{9}<1 \\ n\ge 9 \end{cases}$, skąd $\begin{cases} n>15 \\ n<17. \\ n\ge 9 \end{cases}$

11.10. Nie. *Wskazówka:* Różnych ustawień pięciu słoni jest $5!=120$ i $3\cdot 120<365$.

11.11. 576. *Wskazówka:* Istnieją $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ sposoby ustawienia początkowych czterech cyfr szyfru i tyle samo sposobów ustawienia czterech następnych cyfr, więc wszystkich możliwości sprawdzenia szyfru jest $4!\cdot 4!$, czyli $24\cdot 24$.

11.12. **a)** 4, **b)** 12, **c)** 18, **d)** 18, **e)** 91. *Wskazówka:* **a)** C_4^1, **b)** $\overline{V}_4^2-V_4^1$, **c)** $V_4^3-V_3^2$, **d)** P_4-P_3, **e)** zsumuj liczbę możliwości, gdy pierwszą cyfrą liczby dziesięciocyfrowej jest 3 lub 2 lub 1.

11.13. 256 znaków. *Wskazówka:* $\overline{V}_2^8=2^8$.

11.14. 63. *Wskazówka:* $A=\{39,93,48,84,57,75,66\}$ – zbiór wszystkich możliwych dwóch pierwszych cyfr kodu, $B=\{19,91,28,82,37,73,46,64,55\}$ – zbiór wszystkich możliwych dwóch ostatnich cyfr kodu. Zatem wszystkich możliwych kodów jest $C_7^1\cdot C_9^1=7\cdot 9$.

11.15. 36 000 zł. *Wskazówka:* W rundzie wiosennej rozegrano tyle meczy, ile jest różnych wyborów dwóch zespołów z 16, czyli $C_{16}^2=\binom{16}{2}=120$. Z warunków zadania koszt sędziowania meczu jest równy 300 zł.

11.16. 9 000 100 abonentów. *Wskazówka:* $9 \cdot \overline{V}_{10}^{6} + 1 \cdot \overline{V}_{10}^{2}$. **11.17.** Dwunastu. *Wskazówka:* $C_n^2 = 66$, gdzie n oznacza liczbę graczy. **11.18.** Piętnastu. *Wskazówka:* Niech n oznacza liczbę wszystkich szachistów, gdzie $n \geq 4$. Liczba partii rozegranych przez pozostałych (po wycofaniu się dwóch) szachistów jest równa $C_{n-2}^2 = \binom{n-2}{2}$. Z warunków zadania $\binom{n-2}{2} + 2 \cdot 4 = 86$.

11.19. **a)** 36, **b)** 72. *Wskazówka:* **a)** Liczba powitań C_9^2. **b)** Liczba sms-ów V_9^2.

11.20. **a)** 495, **b)** 396, **c)** 84. *Wskazówka:* **a)** $C_9^1 \cdot C_{11}^2$, **b)** $C_9^2 \cdot C_{11}^1$, **c)** $C_9^3 \cdot C_{11}^0$.

11.21. 135. *Wskazówka:* Można zarezerwować 3 pokoje dwuosobowe lub 2 pokoje trzyosobowe, czyli $C_{10}^3 + C_6^2$. **11.22.** 10 545. *Wskazówka:* Odpowie co najmniej na 3 pytania, tzn. na trzy odpowie i na jedno nie odpowie lub na cztery odpowie, czyli $C_{20}^3 \cdot C_5^1 + C_{20}^4$. **11.23.** 16. *Wskazówka:* Narysowanymi wielokątami mogą być trójkąty, czworokąty, pięciokąty, więc jest ich $C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

11.24. 5994. *Wskazówka:* $111+112+113+121+122+123+131+132+133 =$

$= 9 \cdot 100 + (11+12+13+21+22+23+31+32+33) = 900 + 198 = 1098$,

$211+212+213+221+222+223+231+232+233 =$

$= 9 \cdot 200 + (11+12+13+21+22+23+31+32+33) = 1800 + 198 = 1998$,

$311+312+313+321+322+323+331+332+333 = 9 \cdot 300 + (11+12+13+21+22+23+31+32+33) =$

$= 2700 + 198 = 2898$. Suma wszystkich liczb jest równa $1098 + 1998 + 2898 = 5994$.

11.25. **a)** 96, **b)** 90. *Wskazówka:* **a)** $C_4^1 \cdot C_6^2 + C_4^2 \cdot C_6^1$, **b)** $C_4^2 \cdot C_6^2$.

11.26. *Wskazówka:* Wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych nieparzystych jest $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$. Wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych nieparzystych w zapisie których nie występuje cyfra 7 jest $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2592$. Zatem wnioskujemy, że wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych nieparzystych w zapisie których występuje co najmniej jedna cyfra 7 jest $4500 - 2592$.

11.27. **a)** 75 000, **b)** 78 125 000, **c)** $400 \cdot 5^{99}$. *Wskazówka:* **a)** $C_6^1 \cdot C_4^1 \cdot \overline{V}_5^5 = 6 \cdot 4 \cdot 5^5$, gdzie

$\binom{6}{1}$ – liczba możliwości wyboru miejsca dla liczby parzystej,

$\binom{4}{1}$ – liczba możliwości wyboru liczby parzystej,

5^5 – liczba możliwości ustawienia na pozostałych pięciu miejscach liczby nieparzystej,

b) $C_{10}^1 \cdot C_4^1 \cdot \overline{V}_5^9 = \binom{10}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot 5^9$, **c)** $C_{100}^1 \cdot C_4^1 \cdot \overline{V}_5^{99}$.

11.28. **a)** 90 625, **b)** 95 703 125, **c)** $499 \cdot 5^{99}$. *Wskazówka:* **a)** $6 \cdot 4 \cdot 5^5 + 5 \cdot 5^5$, gdzie iloczyn $6 \cdot 4 \cdot 5^5$ oznacza ilość liczb, w których zapisie dziesiętnym nie występuje cyfra zero, a iloczyn $5 \cdot 5^5$ oznacza ilość liczb, w których zapisie dziesiętnym występuje cyfra zero, **b)** $10 \cdot 4 \cdot 5^9 + 9 \cdot 5^9$, **c)** $100 \cdot 4 \cdot 5^{99} + 99 \cdot 5^{99}$.

11.29. **a)** 1, **b)** 100, **c)** 5050, **d)** 171 700. *Wskazówka:* Wszystkie liczby stucyfrowe możemy podzielić na grupy w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu i jakie inne cyfry różne od zera stoją na pozostałych miejscach zapisu dziesiętnego tej liczby.

b)

Pierwsza cyfra	Możliwe następne cyfry różne od zera	Ilość liczb	Zastosowane wzory
2	–	1	–
1	1	99	$\binom{99}{1}$
	Razem:	100	

c)

Pierwsza cyfra	Możliwe następne cyfry różne od zera	Ilość liczb	Zastosowane wzory
3	–	1	–
2	1	99	$\binom{99}{1}$
1	2	99	$\binom{99}{1}$
1	1 i 1	$\frac{99\cdot 98}{2}$	$\binom{99}{2}$
	Razem:	5050	

d)

Pierwsza cyfra	Możliwe następne cyfry różne od zera	Ilość liczb	Zastosowane wzory
4	–	1	–
3	1	99	$\binom{99}{1}$
2	2	99	$\binom{99}{1}$
	1 i 1	$\frac{99\cdot 98}{2}$	$\binom{99}{2}$
1	3	99	$\binom{99}{1}$
	1 i 2	$99\cdot 98$	V_{99}^2 albo $\binom{99}{1}\cdot\binom{98}{1}$
	1, 1 i 1	$\frac{99\cdot 98\cdot 97}{6}$	$\binom{99}{3}$
	Razem:	171 700	

11.30. 2100. *Wskazówka:* Zauważ, że $24 = 3\cdot 2^3$.
W zapisie dziesiętnym umieszczamy cyfry różne od 1, a pozostałe cyfry są równe 1.

Możliwe cyfry różne od 1	Ilość liczb	Zastosowane wzory
8 i 3	$10\cdot 9$	V_{10}^2 albo $\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{1}$
6 i 4	$10\cdot 9$	V_{10}^2 albo $\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{1}$
6, 2 i 2	$10\cdot\frac{9\cdot 8}{2}$	$\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{2}$
4, 3 i 2	$10\cdot 9\cdot 8$	V_{10}^3 albo $\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{1}\cdot\binom{8}{1}$
3, 2, 2 i 2	$10\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{6}$	$\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{3}$
Razem:	2100	