Kombinatoryka

Wprowadzenie

Przypomnijmy podstawowe wzory na przykładzie następujących sytuacji:

Wprowadzenie

Przypomnijmy podstawowe wzory na przykładzie następujących sytuacji:

- Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne: 5000zł, 3000zł, 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **co najwyżej** jedną nagrodę?
- Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne: 5000zł, 3000zł, 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **więcej niż** jedną nagrodę?
- Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne - każda po 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **co najwyżej** jedną nagrodę?
- Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne - każda po 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **więcej niż** jedną nagrodę?

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne: 5000zł, 3000zł, 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać co najwyżej jedną nagrodę?

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne: 5000zł, 3000zł, 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać co najwyżej jedną nagrodę?

Kolejność wyboru ma znaczenie. Sytuacja, w której A dostaje 5000zł, a B 3000zł jest różna od tej, w której B dostaje 5000zł, a A 3000zł. Nie ma powtórzeń, jak jakiś zawodnik dostał nagrodę, to już go nie liczymy przy kolejnej.

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne: 5000zł, 3000zł, 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać co najwyżej jedną nagrodę?

Kolejność wyboru ma znaczenie. Sytuacja, w której A dostaje 5000zł, a B 3000zł jest różna od tej, w której B dostaje 5000zł, a A 3000zł. Nie ma powtórzeń, jak jakiś zawodnik dostał nagrodę, to już go nie liczymy przy kolejnej.

Mamy więc **wariacje bez powtórzeń**.
Możliwych sytuacji jest $\frac{8!}{5!}$ lub $8 \times 7 \times 6$.

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne: 5000zł, 3000zł, 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **więcej niż** jedną nagrodę?

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne: 5000zł, 3000zł, 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **więcej niż** jedną nagrodę?

Kolejność wyboru ma znaczenie. Sytuacja, w której A dostaje 5000zł, a B 3000zł jest różna od tej, w której B dostaje 5000zł, a A 3000zł. Są powtórzenia, jak jakiś zawodnik dostał nagrodę, to nadal go liczymy przy kolejnej.

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne: 5000zł, 3000zł, 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **więcej niż** jedną nagrodę?

Kolejność wyboru ma znaczenie. Sytuacja, w której A dostaje 5000zł, a B 3000zł jest różna od tej, w której B dostaje 5000zł, a A 3000zł. Są powtórzenia, jak jakiś zawodnik dostał nagrodę, to nadal go liczymy przy kolejnej.

Mamy więc **wariacje z powtórzeniami**.
Możliwych sytuacji jest 8^3 lub $8 \times 8 \times 8$.

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne - każda po 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **co najwyżej** jedną nagrodę?

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne - każda po 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **co najwyżej** jedną nagrodę?

Kolejność wyboru nie ma znaczenia. Sytuacja, w której najpierw A dostaje 1000zł, a później B 1000zł jest taka sama, jak ta, w której najpierw B dostaje 1000zł, a później A 1000zł. Nie ma powtórzeń, jak jakiś zawodnik dostał nagrodę, to już go nie liczymy przy kolejnej.

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne - każda po 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **co najwyżej** jedną nagrodę?

Kolejność wyboru nie ma znaczenia. Sytuacja, w której najpierw A dostaje 1000zł, a później B 1000zł jest taka sama, jak ta, w której najpierw B dostaje 1000zł, a później A 1000zł. Nie ma powtórzeń, jak jakiś zawodnik dostał nagrodę, to już go nie liczymy przy kolejnej.

Mamy więc **kombinacje bez powtórzeń**.
Możliwych sytuacji jest $\binom{8}{3}$ lub $\frac{8 \times 7 \times 6}{3!}$.

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne - każda po 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **więcej niż** jedną nagrodę?

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne - każda po 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **więcej niż** jedną nagrodę?

Kolejność wyboru nie ma znaczenia. Sytuacja, w której najpierw A dostaje 1000zł, a później B 1000zł jest taka sama, jak ta, w której najpierw B dostaje 1000zł, a później A 1000zł. Są powtórzenia, jak jakiś zawodnik dostał nagrodę, to nadal go liczymy przy kolejnej.

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne - każda po 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **więcej niż** jedną nagrodę?

Kolejność wyboru nie ma znaczenia. Sytuacja, w której najpierw A dostaje 1000zł, a później B 1000zł jest taka sama, jak ta, w której najpierw B dostaje 1000zł, a później A 1000zł. Są powtórzenia, jak jakiś zawodnik dostał nagrodę, to nadal go liczymy przy kolejnej.

Mamy więc **kombinacje z powtórzeniami**.

Wprowadzenie

Jest ośmiu zawodników, wręczamy 3 nagrody pieniężne - każda po 1000zł. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli jeden zawodnik może otrzymać **więcej niż** jedną nagrodę?

Kolejność wyboru nie ma znaczenia. Sytuacja, w której najpierw A dostaje 1000zł, a później B 1000zł jest taka sama, jak ta, w której najpierw B dostaje 1000zł, a później A 1000zł. Są powtórzenia, jak jakiś zawodnik dostał nagrodę, to nadal go liczymy przy kolejnej.

Mamy więc **kombinacje z powtórzeniami**. Tutaj stosujemy metodę gwiazdek i kresek. Nagrody pieniężne to gwiazdki (są trzy), kreski dzielą je na ośmiu zawodników (więc potrzeba 7 kresek).

Możliwych sytuacji jest $\binom{10}{3}$, czyli tyle, ile jest sposobów ustawienia 3 gwiazdek i 7 kresek w rzędzie.

Wprowadzenie

W anglojęzycznej literaturze metoda kombinacji z powtórzeniami często jest opisywana jako "stars and bars", dlatego używam tu gwiazdek a nie cukierków.

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

a) bez żadnych ograniczeń,

b) jeśli wśród tych osób jest 4-osobowa rodzina, która musi stać razem,

c) cała rodzina nie może stać razem,

d) żadne dwie osoby z rodziny nie mogą stać obok siebie?

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

a) bez żadnych ograniczeń,

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

a) bez żadnych ograniczeń,
   Prosta sprawa: 10!

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

a) bez żadnych ograniczeń,
   Prosta sprawa: 10!

b) jeśli wśród tych osób jest 4-osobowa rodzina, która musi stać razem,

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

a) bez żadnych ograniczeń,
Prosta sprawa: 10!

b) jeśli wśród tych osób jest 4-osobowa rodzina, która musi stać razem,
Traktujemy rodzinę jako jeden element, mamy więc 7 elementów (rodzina + 6 pozostałych osoby), ustawiamy je na 7! sposobów. Możemy jeszcze przestawiać członków rodziny (na 4! sposobów), czyli ostatecznie mamy: $7! \times 4!$

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

c) cała rodzina nie może stać razem,

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

c) cała rodzina nie może stać razem,
Tu znów sprawa prosta, mamy zaprzeczenie (b), czyli wszystkie możlwie ustawienia minus te z punktu (b): $10! - 7! \times 4!$.

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

c) cała rodzina nie może stać razem,
   Tu znów sprawa prosta, mamy zaprzeczenie (b), czyli wszystkie możlwie ustawienia minus te z punktu (b): $10! - 7! \times 4!$.

d) żadne dwie osoby z rodziny nie mogą stać obok siebie?

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

c) cała rodzina nie może stać razem,
Tu znów sprawa prosta, mamy zaprzeczenie (b), czyli wszystkie możlwie ustawienia minus te z punktu (b): $10! - 7! \times 4!$.

d) żadne dwie osoby z rodziny nie mogą stać obok siebie?
Będziemy postępowali następująco: ustawimy osoby spoza rodziny i będziemy wciskali osoby z rodziny w miejsca pomiędzy ustawionymi osobami.

Ustawianie przedmiotów razem/osobno

Na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w rzędzie:

c) cała rodzina nie może stać razem,
Tu znów sprawa prosta, mamy zaprzeczenie (b), czyli wszystkie możlwie ustawienia minus te z punktu (b): $10! - 7! \times 4!$.

d) żadne dwie osoby z rodziny nie mogą stać obok siebie?
Będziemy postępowali następująco: ustawimy osoby spoza rodziny i będziemy wciskali osoby z rodziny w miejsca pomiędzy ustawionymi osobami.
Czyli najpierw ustawiamy osoby spoza rodziny na 6! sposobów, pózniej wybieramy miejsca dla osób z rodziny (mamy 7 miejsc do wyboru: jedno na początku, jedno na końcu i 5 pomiędzy ustawionymi osobami) na $\binom{7}{4}$ sposobów i jeszcze przestawiamy członków rodziny na 4! sposobów, czyli ostatecznie mamy: $6! \times \binom{7}{4} \times 4!$

Zadanie 1

Ile jest rozwiązań w liczbach naturalnych równania:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 5$$

Zadanie 1

Ile jest rozwiązań w liczbach naturalnych równania:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} = 5$$

To proste zastosowanie metody z gwiazdkami i kresek. Mamy 5 gwiazdek do rozdania i 10 x-ów, czyli potrzebujemy 9 kresek, by podzielić gwiazdki na 10 x-ów. Mamy więc 14 elementów (5 gwiazdek i 9 kresek). Sposób ustawienia tych elementów jest $\binom{14}{5}$ i to jest nasza odpowiedź.

Zadanie 2

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 5.

Zadanie 2

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 5. Niech $x_1, x_2, ..., x_{10}$ to kolejne cyfry naszej liczby. Mamy wtedy:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 5$$

gdzie x_i to liczby naturalne, przy czym wszystkie są mniejsze od 10, a x_1 dodatkowo nie może być 0.

Zadanie 2

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 5. Niech $x_1, x_2, ..., x_{10}$ to kolejne cyfry naszej liczby. Mamy wtedy:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 5$$

gdzie x_i to liczby naturalne, przy czym wszystkie są mniejsze od 10, a x_1 dodatkowo nie może być 0. Odejmujemy od obu stron równania 1 i

otrzymujemy:

$$(x_1 - 1) + x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 4$$

i teraz wszystkie elementy są nieujemne, więc mamy analogiczny przykład do poprzedniego zadania. Mamy 4 gwiazdki i 9 kresek (by podzielić gwiazdki na 10 x-ów). Ustawiamy je na $\binom{13}{4} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4 \times 3 \times 2} = 715$

Zadanie 2 - druga metoda

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 5.

Zadanie 2 - druga metoda

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 5. Analizujemy różne przypadki:

a) pięć 1, jedna musi stać na początku, dla pozostałych czterech wybieramy miejsca na $\binom{9}{4} = 126$

Zadanie 2 - druga metoda

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 5. Analizujemy różne przypadki:

a) pięć 1, jedna musi stać na początku, dla pozostałych czterech wybieramy miejsca na $\binom{9}{4} = 126$

b) trzy 1 i jedna 2, pierwsza opcja z 2 na początku i miejsca dla 1 $\binom{9}{3} = 84$, druga opcja z 1 na początku: miejsce dla dwóch 1 $\binom{9}{2} = 36$ i miejsce dla 2 $\binom{7}{1} = 7$. Ostatecznie: $84 + 36 \times 7 = 336$

Zadanie 2 - druga metoda

Ile jest liczb 10-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 5. Analizujemy różne przypadki:

a) pięć 1, jedna musi stać na początku, dla pozostałych czterech wybieramy miejsca na $\binom{9}{4} = 126$

b) trzy 1 i jedna 2, pierwsza opcja z 2 na początku i miejsca dla 1 $\binom{9}{3} = 84$, druga opcja z 1 na początku: miejsce dla dwóch 1 $\binom{9}{2} = 36$ i miejsce dla 2 $\binom{7}{1} = 7$. Ostatecznie: $84 + 36 \times 7 = 336$

c) dwie 1 i jedna 3, pierwsza opcja z 3 na początku i miejsca dla 1 $\binom{9}{2} = 36$, druga opcja z 1 na początku: miejsce dla 1 $\binom{9}{1} = 9$ i miejsce dla 3 $\binom{8}{1} = 8$. Ostatecznie: $36 + 9 \times 8 = 108$

Zadanie 2 - druga metoda

Dalej analizujemy różne przypadki:

d) jedna 3 i jedna 2, pierwsza opcja z 2 na początku i miejsca dla 3 $\binom{9}{1} = 9$, druga opcja z 2 na początku: miejsce dla 3 $\binom{9}{1} = 9$.
Ostatecznie: $9 + 9 = 18$

Zadanie 2 - druga metoda

Dalej analizujemy różne przypadki:

d) jedna 3 i jedna 2, pierwsza opcja z 2 na początku i miejsca dla 3 $\binom{9}{1} = 9$, druga opcja z 2 na początku: miejsce dla 3 $\binom{9}{1} = 9$.
Ostatecznie: $9 + 9 = 18$

e) jedna 1 i jedna 4, pierwsza opcja z 4 na początku i miejsca dla 1 $\binom{9}{1} = 9$, druga opcja z 1 na początku: miejsce dla 4 $\binom{9}{1} = 9$
Ostatecznie: $9 + 9 = 18$

Zadanie 2 - druga metoda

Dalej analizujemy różne przypadki:

d) jedna 3 i jedna 2, pierwsza opcja z 2 na początku i miejsca dla 3 $\binom{9}{1} = 9$, druga opcja z 2 na początku: miejsce dla 3 $\binom{9}{1} = 9$.
Ostatecznie: $9 + 9 = 18$

e) jedna 1 i jedna 4, pierwsza opcja z 4 na początku i miejsca dla 1 $\binom{9}{1} = 9$, druga opcja z 1 na początku: miejsce dla 4 $\binom{9}{1} = 9$
Ostatecznie: $9 + 9 = 18$

f) jedna 1 i dwie 2, pierwsza opcja z 1 na początku i miejsca dla 2 $\binom{9}{2} = 36$, druga opcja z 2 na początku: miejsce dla 1 $\binom{9}{1} = 9$ i miejsce dla 2 $\binom{8}{1} = 8$. Ostatecznie: $36 + 9 \times 8 = 108$

Zadanie 2 - druga metoda

Dalej analizujemy różne przypadki:

d) jedna 3 i jedna 2, pierwsza opcja z 2 na początku i miejsca dla 3 $\binom{9}{1} = 9$, druga opcja z 2 na początku: miejsce dla 3 $\binom{9}{1} = 9$.
Ostatecznie: $9 + 9 = 18$

e) jedna 1 i jedna 4, pierwsza opcja z 4 na początku i miejsca dla 1 $\binom{9}{1} = 9$, druga opcja z 1 na początku: miejsce dla 4 $\binom{9}{1} = 9$
Ostatecznie: $9 + 9 = 18$

f) jedna 1 i dwie 2, pierwsza opcja z 1 na początku i miejsca dla 2 $\binom{9}{2} = 36$, druga opcja z 2 na początku: miejsce dla 1 $\binom{9}{1} = 9$ i miejsce dla 2 $\binom{8}{1} = 8$. Ostatecznie: $36 + 9 \times 8 = 108$

g) Ostatni, ufff. Jedna 5. Musi stać na początku, czyli jest tylko jedna taka liczba.

Zadanie 2 - druga metoda

Dalej analizujemy różne przypadki:

d) jedna 3 i jedna 2, pierwsza opcja z 2 na początku i miejsca dla 3 $\binom{9}{1} = 9$, druga opcja z 2 na początku: miejsce dla 3 $\binom{9}{1} = 9$.
Ostatecznie: $9 + 9 = 18$

e) jedna 1 i jedna 4, pierwsza opcja z 4 na początku i miejsca dla 1 $\binom{9}{1} = 9$, druga opcja z 1 na początku: miejsce dla 4 $\binom{9}{1} = 9$
Ostatecznie: $9 + 9 = 18$

f) jedna 1 i dwie 2, pierwsza opcja z 1 na początku i miejsca dla 2 $\binom{9}{2} = 36$, druga opcja z 2 na początku: miejsce dla 1 $\binom{9}{1} = 9$ i miejsce dla 2 $\binom{8}{1} = 8$. Ostatecznie: $36 + 9 \times 8 = 108$

g) Ostatni, ufff. Jedna 5. Musi stać na początku, czyli jest tylko jedna taka liczba.

Zadanie 2 - druga metoda

Mamy w sumie $126 + 336 + 108 + 18 + 18 + 108 + 1 = 715$ takich liczb

Zadanie 2 - druga metoda

Mamy w sumie $126 + 336 + 108 + 18 + 18 + 108 + 1 = 715$ takich liczb
Oczywiście pierwsza metoda jest znacznie szybsza.

Zadanie 2 - druga metoda

Mamy w sumie $126 + 336 + 108 + 18 + 18 + 108 + 1 = 715$ takich liczb
Oczywiście pierwsza metoda jest znacznie szybsza. Warto jednak znać obie. Pierwszą, by z powyższym przykładem (na maturze za 4 punkty) poradzić sobie w minutę. Drugą, gdy otrzymamy następne zadanie:

Zadanie 3

Ile jest liczb 8-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 67.

Zadanie 3

Ile jest liczb 8-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 67.
Analizujemy różne przypadki:

a) siedem 9 i 4. Ustawiamy 4 na $\binom{8}{1} = 8$ sposobów.

Zadanie 3

Ile jest liczb 8-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 67.
Analizujemy różne przypadki:

a) siedem 9 i 4. Ustawiamy 4 na $\binom{8}{1} = 8$ sposobów.

b) sześć 9 i pierwsza opcja 6 i 7: ustawiamy 6 na $\binom{8}{1} = 8$ i 7 na $\binom{7}{1} = 7$ sposobów; druga opcja 8 i 5, analogicznie 8×7.
Ostatecznie $8 \times 7 + 8 \times 7 = 112$

Zadanie 3

Ile jest liczb 8-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 67.
Analizujemy różne przypadki:

a) siedem 9 i 4. Ustawiamy 4 na $\binom{8}{1} = 8$ sposobów.

b) sześć 9 i pierwsza opcja 6 i 7: ustawiamy 6 na $\binom{8}{1} = 8$ i 7 na $\binom{7}{1} = 7$ sposobów; druga opcja 8 i 5, analogicznie 8×7.
Ostatecznie $8 \times 7 + 8 \times 7 = 112$

c) pięć 9 i pierwsza opcja dwie 7 i jedna 8: $\binom{8}{2}\binom{6}{1} = 168$; druga opcja dwie 8 i jedna 6, analogicznie 168 możliwości. Ostatecznie:
$168 + 168 = 336$

Zadanie 3

Ile jest liczb 8-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 67.
Analizujemy różne przypadki:

a) siedem 9 i 4. Ustawiamy 4 na $\binom{8}{1} = 8$ sposobów.

b) sześć 9 i pierwsza opcja 6 i 7: ustawiamy 6 na $\binom{8}{1} = 8$ i 7 na $\binom{7}{1} = 7$ sposobów; druga opcja 8 i 5, analogicznie 8×7.
Ostatecznie $8 \times 7 + 8 \times 7 = 112$

c) pięć 9 i pierwsza opcja dwie 7 i jedna 8: $\binom{8}{2}\binom{6}{1} = 168$; druga opcja dwie 8 i jedna 6, analogicznie 168 możliwości. Ostatecznie:
$168 + 168 = 336$

Zadanie 3

Dalej analizujemy przypadki:

d) cztery 9, trzy 8 i jedna 7. Ustawiamy 8 i 7 na $\binom{8}{3} \times \binom{5}{1} = 280$ sposobów.

Zadanie 3

Dalej analizujemy przypadki:

d) cztery 9, trzy 8 i jedna 7. Ustawiamy 8 i 7 na $\binom{8}{3} \times \binom{5}{1} = 280$ sposobów.

e) trzy 9 i pięc 8. Ustawiamy 8 na $\binom{8}{5} = 56$

Więcej możliwości nie ma - warto sprawdzić. Ostatecznie otrzymujemy $8 + 112 + 336 + 280 + 56 = 792$ liczby.

Zadanie 3 - druga metoda, dla odważnych

Ile jest liczb 8-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 67.

Zadanie 3 - druga metoda, dla odważnych

Ile jest liczb 8-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 67.
To jest zastosowanie naszej szybszej metody, ale już po bardziej skomplikowanych przekształceniach (ale jeśli ktoś jest w tym wprawiony to znów rozwiązujemy skomplikowane zadanie w minutę).

Zadanie 3 - druga metoda, dla odważnych

Ile jest liczb 8-cyfrowych, których suma cyfr wynosi 67.
To jest zastosowanie naszej szybszej metody, ale już po bardziej skomplikowanych przekształceniach (ale jeśli ktoś jest w tym wprawiony to znów rozwiązujemy skomplikowane zadanie w minutę). Rozważamy równanie:

$$x_1 + x_2 + ... + x_8 = 67$$

Zadanie 3 - druga metoda, dla odważnych

Niestety tutaj nie możemy zastosować wprost tej metody, bo nie chcemy mieć x-ów większych od 9.

Zadanie 3 - druga metoda, dla odważnych

Niestety tutaj nie możemy zastosować wprost tej metody, bo nie chcemy mieć x-ów większych od 9. Możemy postąpić następująco. Odejmujemy 72 (8 razy po 9) od obu stron:

$$(x_1 - 9) + (x_2 - 9) + ... + (x_8 - 9) = -5$$

mnożymy przez -1:

$$(9 - x_1) + (9 - x_2) + ... + (9 - x_8) = 5$$

i teraz jest idealnie, wszystkie elementy muszą być nieujemne (i na pewno będą mniejsze od 9). Mamy 5 gwiazdek i 7 kresek, by podzielić je na 8 części. Mamy więc 12 elementów. Sposobów ustawienie tych gwiazdek i kresek jest więc $\binom{12}{5} = 792$.