

Name:

Result:

Group A

Zadanie 1.

[2 punkty]

Dla jakiej wartości parametru p prawdziwe jest równanie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3)}{3 - pn + (p + 2)n^2} = 1$$

Zadanie 2.

[2 punkty]

Suma pierwszych n wyrazów ciągu (a_n) dana jest wzorem $S_n = 5 \cdot 2^n - 5$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny.

Zadanie 3.

[3 punkty]

Ciąg a_n jest zdefiniowany rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases}$$

Natomiast ciąg $b_n = \frac{3 - n^2}{2n^2 + n + 1}$. Oblicz $\frac{a_5}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$.

Zadanie 4.

[3 punkty]

Drugi, trzeci i dziewiąty wyraz ciągu arytmetycznego tworzą ciąg geometryczny. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego wiedząc, że jest on monotoniczny.

Zadanie 5.

[3 punkty]

Dane są ciągi:

$$a_n = \sqrt[n]{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n} \qquad b_n = \frac{25^{n+1} + 16^{n+3}}{5^{2n+1} - 2^{4n+3}}$$

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3b_n)$.**Zadanie 6.**

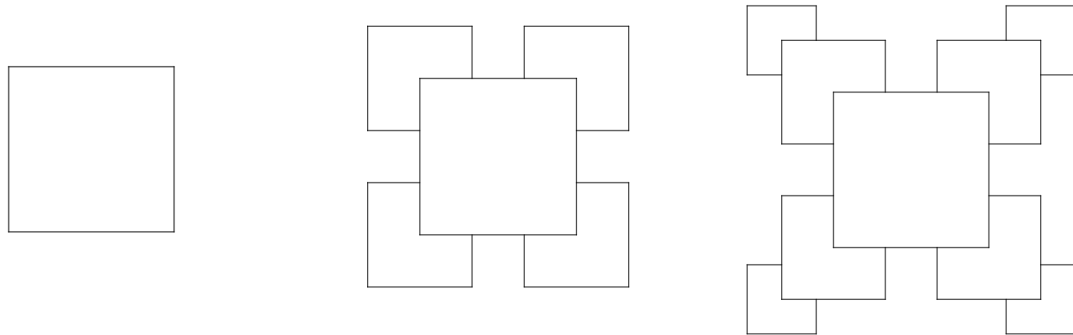
[4 punkty]

$x + 4$, x , $\frac{x}{x+1}$ tworzą drugi, trzeci i czwarty wyraz nieskończonego, malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 7.

[4 punkty]

Tworzymy figurę w następujący sposób. Rozpoczynam od kwadratu o boku a . W każdym kolejnym kroku w górnym lewym, górnym prawym, dolnym lewym oraz dolnym prawym rogu poprzedniej figury umieszczamy kwadrat (czwarta część nowego kwadratu pokrywa się z poprzednim). Kwadraty umieszczone w kroku $n + 1$ mają bok długości $\frac{2}{3}$ razy mniejszej od długości boków umieszczonych w kroku n . Pierwsze trzy kroki przedstawione są poniżej:



Wykonujemy nieskończoną liczbę kroków. Pole otrzymanej figury to 105. Oblicz a .

Zadanie 8.[4 *punkty*]

Rozwiąż nierówność:

$$x^2 + \frac{x^3}{x-1} + \frac{x^4}{(x-1)^2} + \dots \leq 2$$

Zadanie 9.

[4 punkty]

W ciągu arytmetycznym (a_n) trzeci wyraz wynosi 29, natomiast siódmy wynosi 17. W nieskończonym ciągu geometrycznym b_n mamy $b_1 = a_2$, $b_2 = a_{10}$ oraz $b_3 = a_k$. Oblicz k oraz sumę wszystkich wyrazów ciągu b_n o numerach nieparzystych.