# Jedynka trygonometryczna

# Zapis

Krótka uwaga o zapisie.

W IB (i anglojęzycznych źródłach) funkcję *tangens* zapisujemy używając skrótu "tan", natomiast w polskojęzycznych źródłach używamy "tg", podobnie jest z funkcją *cotangens* - międzynarodowa opcja to "cot", polska to "ctg". Funkcję *cosecans* można zapisywać jako "cosec" lub "csc".

# Co na prezentacji?

Musimy umieć zastosować jedynkę trygonometryczną do obliczenia wartości funkcji trygonometrycznych, gdy mamy daną jedną z nich.

Na następnych slajdach omówione zostaną przykłady zastosowania jedynki trygonometrycznej

# Jedynka trygonometryczna

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

# Jedynka trygonometryczna

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Równość ta jest prawdziwa dla dowolnego kąta $\alpha$, czyli np.

$$\sin^2(11^\circ) + \cos^2(11^\circ) = 1$$

# Znaki funkcji trygonometrycznych

Warto pamiętać jaki znak ma dana funkcja trygonometryczna w zależności od tego, w której ćwiartce jest nasz kąt:

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| sin | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| cos | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| tg | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

# Znaki funkcji trygonometrycznych

Można to zapamiętać poprzez **A**dd **S**ugar **T**o **C**offee, czyli **A**ll, **S**ine, **T**angent, **C**osine.

Osobiście pamiętam to, bo po prostu mam w głowie unit circle.

# Zadanie 1

Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ oraz, że $\alpha$ jest kątem rozwartym, oblicz $\cos\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\alpha$.

# Zadanie 1

Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ oraz, że $\alpha$ jest kątem rozwartym, oblicz $\cos\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\alpha$.

$\alpha$ jest kątem rozwartym, czyli $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, jest w drugiej ćwiartce.

# Zadanie 1

Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ oraz, że $\alpha$ jest kątem rozwartym, oblicz $\cos\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\alpha$.

$\alpha$ jest kątem rozwartym, czyli $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, jest w drugiej ćwiartce.

$\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

# Zadanie 1

Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ oraz, że $\alpha$ jest kątem rozwartym, oblicz $\cos\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\alpha$.

$\alpha$ jest kątem rozwartym, czyli $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, jest w drugiej ćwiartce.

$\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

czyli

# Zadanie 1

Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ oraz, że $\alpha$ jest kątem rozwartym, oblicz $\cos\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\alpha$.

$\alpha$ jest kątem rozwartym, czyli $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, jest w drugiej ćwiartce.

$\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

czyli

$$\cos^2\alpha = \frac{15}{16}$$

# Zadanie 1

$$\cos^2\alpha = \frac{15}{16}$$

ma dwa rozwiązania

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \text{lub} \qquad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

# Zadanie 1

$$\cos^2\alpha = \frac{15}{16}$$

ma dwa rozwiązania

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \text{lub} \qquad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Ponieważ wiemy, że jesteśmy w II ćwiartce, czyli *cosinus* musi być ujemny, to wnioskujemy, że:

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

# Zadanie 1

*Tangens* obliczamy pamiętając, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

# Zadanie 1

*Tangens* obliczamy pamiętając, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Czyli

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

# Zadanie 2

Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = 3$ oraz, że $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ , oblicz wartości pozostałych funkcji matematycznych.

# Zadanie 2

Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = 3$ oraz, że $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ , oblicz wartości pozostałych funkcji matematycznych.

$\alpha$ jest w trzeciej ćwiartce, czyli:

# Zadanie 2

Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = 3$ oraz, że $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ , oblicz wartości pozostałych funkcji matematycznych.

$\alpha$ jest w trzeciej ćwiartce, czyli:

$\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$ i $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

# Zadanie 2

Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = 3$ oraz, że $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ , oblicz wartości pozostałych funkcji matematycznych.

$\alpha$ jest w trzeciej ćwiartce, czyli:

$\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

Korzystamy ze wzoru:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

czyli

# Zadanie 2

Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = 3$ oraz, że $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ , oblicz wartości pozostałych funkcji matematycznych.

$\alpha$ jest w trzeciej ćwiartce, czyli:

$\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$ i $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

Korzystamy ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

czyli

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3$$

czyli

# Zadanie 2

Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = 3$ oraz, że $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ , oblicz wartości pozostałych funkcji matematycznych.

$\alpha$ jest w trzeciej ćwiartce, czyli:

$\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

Korzystamy ze wzoru:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

czyli

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3$$

czyli

$$\sin\alpha = 3\cos\alpha$$

# Zadanie 2

Teraz wykorzystamy jedynkę trygonometryczną i podstawimy $\sin\alpha = 3\cos\alpha$:

# Zadanie 2

Teraz wykorzystamy jedynkę trygonometryczną i podstawimy $\sin\alpha = 3\cos\alpha$:

$$(3\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

Dochodzimy do równania:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{10}$$

# Zadanie 2

Teraz wykorzystamy jedynkę trygonometryczną i podstawimy $\sin\alpha = 3\cos\alpha$:

$$(3\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

Dochodzimy do równania:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{10}$$

To równanie ma dwa rozwiązania:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \text{lub} \qquad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

# Zadanie 2

Teraz wykorzystamy jedynkę trygonometryczną i podstawimy $\sin\alpha = 3\cos\alpha$:

$$(3\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

Dochodzimy do równania:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{10}$$

To równanie ma dwa rozwiązania:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \text{lub} \qquad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Wiemy, że *cosinus* ma być ujemny, czyli:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

# Zadanie 2

Z *sinusem* nie będzie problemów:

$$\sin\alpha = 3\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

# Zadanie 2

Z *sinusem* nie będzie problemów:

$$\sin\alpha = 3\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Obliczmy jeszcze pozostałe funkcje trygonometryczne, czyli $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ oraz $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\sqrt{10}$$
$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{3}$$

# Zadanie 3

Wiedząc, że $\sec\theta = \sqrt{3}$ oraz, że $\theta \in (\pi, 2\pi)$ oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\theta$.

# Zadanie 3

Wiedząc, że $\sec\theta = \sqrt{3}$ oraz, że $\theta \in (\pi, 2\pi)$ oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\theta$.

Po pierwsze skoro $\sec\theta = \sqrt{3}$, to znaczy, że $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

# Zadanie 3

Wiedząc, że $\sec\theta = \sqrt{3}$ oraz, że $\theta \in (\pi, 2\pi)$ oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\theta$.

Po pierwsze skoro $\sec\theta = \sqrt{3}$, to znaczy, że $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ponadto przedział sugeruje 3. lub 4. ćwiartkę, ale skoro *cosinus* jest dodatni, to musi to być czwarta ćwiartka.

# Zadanie 3

Wiedząc, że $\sec\theta = \sqrt{3}$ oraz, że $\theta \in (\pi, 2\pi)$ oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\theta$.

Po pierwsze skoro $\sec\theta = \sqrt{3}$, to znaczy, że $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ponadto przedział sugeruje 3. lub 4. ćwiartkę, ale skoro *cosinus* jest dodatni, to musi to być czwarta ćwiartka.

Z jedynki mamy:

$$\sin^2\theta + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

# Zadanie 3

Otrzymujemy $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ale skoro nasz kąt jest w czwartej ćwiartce, to mamy:

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

To daje oczywiście $\csc = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\sqrt{2} \qquad \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.