Maturzysta	• oblicza wariancję zestawu danych (A) • oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych)

6.37 R Oblicz średnią ważoną liczb 2, 5, 9 z wagami równymi odpowiednio
a) 0,2, 0,7, 0,1; **b)** 5, 3, 2.

6.38 Degustator badając jakość wina ocenia jego barwę, zapach oraz smak. Ocenę wyraża w punktach. Jako oceny cząstkowe stosuje się np. liczby całkowite z przedziału ⟨0; 10⟩, natomiast końcowa ocena obliczana jest jako średnia ważona ocen cząstkowych. W tabeli podano system wag stosowany przez pewnego producenta win oraz punkty, jakie przydzielił degustator dwóm rocznikom wina *Bordeaux*. Sprawdź, który rocznik uzyskał wyższą ocenę.

Kategoria	Waga	*Bordeaux* 1991	*Bordeaux* 1995
Barwa	0,1	7	10
Zapach	0,3	8	10
Smak	0,6	10	8

6.39 Oblicz wariancję i odchylenie standardowe podanego zestawu danych.
a) R 2, 3, 3, 4; **b)** 1, 2, 4, 1, 5, 2.

6.40 R Badania statystyczne dotyczące sytuacji materialnej rodzin dostarczyły m.in. informacji o liczbie dzieci w rodzinach. Korzystając z danych zamieszczonych w tabeli obok, oblicz odchylenie standardowe liczby dzieci w rozpatrywanej grupie rodzin.

Liczba dzieci	Liczba rodzin
0	150
1	400
2	550
3	100

ZADANIA MATURALNE

KOMBINATORYKA

silnia, symbol Newtona

592. O ile procent liczba $\frac{15!}{13!+12!}$ jest mniejsza od liczby $\binom{26}{2}$?

593. Dane są liczby $a=18!$ i $b=20!$.
a) Ile razy liczba b jest większa od liczby a?
b) Liczbę a zapisano w systemie dziesiętnym. Podaj cyfrę jedności liczby a.
c) Liczbę b zapisano w systemie dziesiętnym. Podaj cyfrę tysięcy liczby b.
d) W Uzasadnij, że liczba a jest podzielna przez 119, a nie jest podzielna przez 19.

594. R Sprawdź, czy liczba $\binom{1}{0}+\binom{3}{2}+\binom{5}{4}+\ldots+\binom{39}{38}+\binom{41}{40}$ jest mniejsza od 500.

595. T w i e r d z e n i e. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość* $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.

Wykorzystując podaną równość, oblicz
a) liczbę wszystkich podzbiorów zbioru pięcioelementowego;
b) liczbę wszystkich niepustych podzbiorów zbioru sześcioelementowego.

596. Rozwiąż równanie $\binom{n+2}{4}=5\cdot\binom{n}{3}$.

597. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n spełniające równanie $2\cdot\binom{n}{n-4}=\binom{n+1}{n-3}$.

598. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n spełniające nierówność $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}<\binom{n+1}{3}$.

599. Wykaż, że jeśli $k\in \mathbf{N}$, $n\in \mathbf{N}$ i $k<n$, to $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

600. Oblicz granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n=\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$. Zbadaj, czy ten ciąg jest monotoniczny.

Egzamin dojrzałości (LO – grupa humanistyczna) w woj. krakowskim w roku 1974

zadania kombinatoryczne

601. W jadłospisie baru mlecznego „Biedronka" znajduje się 8 zup, 7 drugich dań i 2 kompoty, natomiast konsument chcący zjeść obiad w barze „Gdańskim" ma do wyboru 6 zup, 5 drugich dań i 4 kompoty. Pan Kowalski zamierza zjeść obiad w jednym z tych barów. W którym barze ma większą możliwość wyboru zestawu obiadowego składającego się z zupy, drugiego dania i kompotu?

602. Od domu wczasowego do podnóża góry prowadzą 3 trasy autokarowe, a od podnóża góry na szczyt wiodą 4 szlaki turystyczne. Oblicz, ile różnych tras może zaplanować organizator wycieczki, jeżeli ze względów poznawczych droga powrotna będzie przebiegać

a) innym szlakiem turystycznym i tą samą trasą autokarową;

b) innym szlakiem turystycznym i inną trasą autokarową.

603. R Aby otworzyć furtkę, przez którą wchodzi się na teren posesji pana Nowaka, należy na klawiaturze domofonu wybrać czterocyfrowy kod. Syn pana Nowaka dawno nie był u swojego ojca, ale zapamiętał, że pierwsza i czwarta cyfra kodu jest parzysta, a suma dwóch środkowych cyfr jest równa 6. Oblicz, ile co najwyżej razy będzie musiał wpisać kod syn pana Nowaka, aby mógł otworzyć furtkę.

604. **(0–2)** Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe nieparzyste.

CKE, próbna matura – poziom podstawowy, listopad 2010

605. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których

a) cyfrą setek jest 7;

b) cyfrą setek i cyfrą jedności jest 7;

c) cyfrą setek lub cyfrą jedności jest 7.

606. **(0–4)** Oblicz, ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, jest dokładnie jedna cyfra 7 i dokładnie jedna cyfra parzysta.

CKE, matura – poziom podstawowy, czerwiec 2012

607. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których

a) cyfra setek jest dwa razy mniejsza od cyfry dziesiątek;

b) cyfra setek jest o 2 większa od cyfry dziesiątek.

608. **(0 – 2)** Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek.

CKE, matura – poziom podstawowy, czerwiec 2013

609. **(0 – 4)** Ile jest liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie następujące cztery warunki:

(1) cyfry setek, dziesiątek i jedności są parzyste,

(2) cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek,

(3) cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności,

(4) w zapisie tej liczby nie występuje cyfra 9.

CKE, matura – poziom podstawowy, sierpień 2011

610. Wyznaczymy liczbę wszystkich dzielników liczby $a = 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2$.
Zauważmy, że każdy dzielnik liczby a jest liczbą postaci $3^k \cdot 5^m \cdot 7^n$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$. Zatem liczba dzielników liczby a jest równa liczbie trójwyrazowych ciągów (k, m, n), gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$. Wyznaczamy liczbę tych ciągów: $4 \cdot 5 \cdot 3$. Tak więc liczba a ma 60 dzielników.
Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, wyznacz liczbę dzielników liczby

a) $2^6 \cdot 11^7 \cdot 13$; **b)** 5400.

611. R Ile jest liczb naturalnych, które są dzielnikami liczby 10010?

612. Uczniowie klasy matematyczno-informatycznej muszą uczęszczać na fakultety z trzech przedmiotów, w tym z co najmniej dwóch przedmiotów ścisłych. Wyboru dokonują spośród dziesięciu przedmiotów, wśród których są cztery przedmioty ścisłe. Oblicz, na ile sposobów może wybrać fakultety każdy uczeń tej klasy.

613. R W turnieju szachowym każdy uczestnik rozegrał z każdym z pozostałych zawodników jedną partię. W całym turnieju rozegrano 66 partii. Ilu zawodników brało udział w tym turnieju?

614. Przed sklepem jest siedem miejsc parkingowych (jedno obok drugiego). Na ile sposobów na tym parkingu mogą zaparkować cztery samochody tak, aby

a) żadne dwa samochody nie parkowały na sąsiednich miejscach;

b) między żadnymi dwoma samochodami nie było wolnego miejsca.

615. Na każdej z ośmiu kartek zapisano jedną z liczb 1, 2, ... , 8, na każdej kartce inną liczbę. Następnie każdą kartkę wkładamy do jednej z trzech szuflad biurka.

a) Na ile sposobów można rozmieścić kartki w szufladach?

b) Na ile sposobów można rozmieścić kartki w szufladach w taki sposób, aby w pierwszej szufladzie nie było kartek z parzystą liczbą?

c) **R** Na ile sposobów można rozmieścić kartki w taki sposób, aby sumy liczb zapisanych na kartkach znajdujących się w poszczególnych szufladach były równe?

616. W przedziale wagonu kolejowego znajduje się 8 ponumerowanych miejsc w dwóch rzędach po 4 miejsca. Do pustego przedziału weszło 5 osób: 3 panie i 2 panów. Panie zajęły miejsca w jednym rzędzie, a panowie usiedli na miejscach w drugim rzędzie. Oblicz, na ile sposobów osoby te mogły zająć miejsca tak, aby

a) panie siedziały zwrócone twarzą do kierunku jazdy;

b) R vis-à-vis każdego z panów siedziała pani.

617. Dane są zbiory $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{5, 6, 7, 8, 9\}$.

a) Ile jest wszystkich funkcji ze zbioru A w zbiór B?

b) Ile jest wszystkich funkcji ze zbioru A w zbiór B, które dla różnych argumentów przyjmują różne wartości?

c) Ile jest wszystkich funkcji rosnących ze zbioru A w zbiór B?

618. Oblicz liczbę tych permutacji zbioru $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, w których

a) liczby 1, 2 nie sąsiadują ze sobą;

b) R liczby 1, 2, 3 występują w porządku rosnącym.

619. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których

a) cyfra tysięcy jest mniejsza od cyfry setek, a cyfra setek jest mniejsza od cyfry dziesiątek;

b) cyfra tysięcy jest większa od cyfry setek, a cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek?

620. R Dwanaścioro uczniów klasy IIA – wśród nich Marta i Wojtek – po zakończeniu roku szkolnego pozostało w budynku szkoły, aby zrobić generalne porządki w sali lekcyjnej, którą się opiekują. Przed rozpoczęciem sprzątania, uczniowie ustalili, że czworo z nich będzie myć okna, inna czwórka umyje ławki, a pozostałe cztery osoby zrobią porządki w klasowej biblioteczce.

a) Na ile sposobów uczniowie mogli dokonać podziału na czwórki?

b) Na ile sposobów uczniowie mogli dokonać takiego podziału, aby Marta i Wojtek znaleźli się w tej samej czwórce?

621. R Wśród dwunastu dziewcząt ze szkolnego zespołu siatkarek są Krysia i Ula. Jeśli dziewczęta trenują w większej sali gimnastycznej, to grupa jest dzielona na dwa 6-osobowe zespoły, a jeśli w mniejszej, to na trzy zespoły 4-osobowe. Na ile sposobów można dokonać podziału grupy siatkarek na zespoły,

a) jeśli dziewczyny trenują w większej sali;

b) jeśli dziewczyny trenują w mniejszej sali;

c) tak, aby Krysia i Ula znalazły się w jednym zespole, jeśli trening odbywa się w większej sali;

d) tak, aby Krysia i Ula znalazły się w jednym zespole, jeśli trening odbywa się w mniejszej sali;

e) tak, aby Krysia i Ula znalazły się w różnych zespołach, jeśli trening odbywa się w mniejszej sali?

622. Ośmiu kolegów postanowiło po lekcjach zagrać w piłkę. Przed rozpoczęciem meczu muszą podzielić się na dwa czteroosobowe zespoły. Na ile sposobów mogą dokonać tego podziału?

623. Każdy z sześciu skazanych ma być osadzony w jednym z trzech zakładów karnych.

a) Na ile sposobów można rozmieścić skazanych w tych trzech zakładach karnych?

b) Na ile sposobów można rozmieścić skazanych tak, aby w każdym zakładzie karnym wyrok odsiadywało dwóch z nich?

624. Komendant posterunku policji ma do dyspozycji siedmiu policjantów. Oblicz, na ile sposobów komendant może spośród tych policjantów utworzyć

a) dwa trzyosobowe patrole;

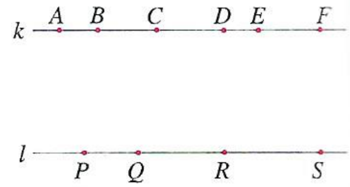
b) trzy dwuosobowe patrole.

625. Punkty A, B, C, D, E, F należą do prostej k, a punkty P, Q, R, S należą do prostej l równoległej do k ($k \neq l$).

a) Ile można narysować takich odcinków, że jeden koniec odcinka należy do zbioru $\{P, Q, R, S\}$, a drugi do zbioru $\{A, B, C, D, E, F\}$?

b) W Ile można narysować czworokątów o wierzchołkach należących do zbioru $\{A, B, C, D, E, F, P, Q, R, S\}$?

c) W Ile można narysować trójkątów o wierzchołkach należących do zbioru $\{A, B, C, D, E, F, P, Q, R, S\}$?



626. Na okręgu zaznaczono 6 różnych punktów.

a) Ile trójkątów o wierzchołkach w tych punktach możemy narysować?

b) Ile wielokątów o wierzchołkach w tych punktach możemy narysować?

627. R Ze zbioru wszystkich punktów, których odcięta należy do zbioru $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, a rzędna należy do zbioru $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, wybieramy trzy punkty. Ile mamy możliwości dokonania takiego wyboru, aby

a) wszystkie wybrane punkty należały do jednej prostej równoległej do osi rzędnych;

b) wszystkie wybrane punkty były z pierwszej ćwiartki układu współrzędnych.

628.* R Po płaszczyźnie z układem współrzędnych można wędrować w następujący sposób: z punktu (n, k) można przejść tylko do punktu $(n + 1, k)$ albo do punktu $(n, k + 1)$. Oblicz liczbę dróg prowadzących z punktu $(0, 0)$ do punktu $(4, 4)$.

629.* R Przekątne ośmiokąta wypukłego mają tę własność, że żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. W ilu punktach przecinają się przekątne tego wielokąta?

◆ ◆ ◆ ◆ ◆

630. **(0 – 3)** Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz występuje cyfra 5.
CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2013

631. **(0 – 3)** Oblicz, ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry parzyste.
CKE, „Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015"

632. **(0 – 4)** Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.
CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2011

UWAGA. Jeżeli zdający poprawnie rozwiązał zadanie: *Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują **co najmniej** dwie dwójki i występują **co najmniej** trzy trójki*, to otrzymał **4 punkty**.

633. Oblicz, ile jest liczb pięciocyfrowych, w zapisie których są trzy cyfry parzyste i dwie nieparzyste?

634. Oblicz, ile jest liczb siedmiocyfrowych, w zapisie których występują dokładnie dwie dwójki i dokładnie trzy trójki.

635. Oblicz, ile jest liczb czternastocyfrowych podzielnych przez 9, których cyframi są tylko 1 lub 2.

636. Oblicz, ile jest takich liczb naturalnych sześciocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 6.

637. **(0 – 4)** Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12.
CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2012

638. **(0 – 7)** Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.
CKE, „Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015"

639. Oblicz, ile jest wszystkich liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr równej 3.

640. **(0 – 6)** Oblicz, ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5.
CKE, „Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015"

641. Oblicz, ile jest dziesięciocyfrowych liczb o różnych cyfrach i takich, że cyfry parzyste występują w porządku rosnącym, a cyfry nieparzyste w porządku malejącym.

642. Oblicz, ile jest sześciocyfrowych liczb, w zapisie których występuje „szóstka" i każda kolejna cyfra (z wyjątkiem pierwszej) jest większa od poprzedniej.

643.* **R** Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych o różnych cyfrach należących do zbioru $\{1, 2, \ldots, 8\}$ i spełniających warunki
1) cyfry parzyste występują w porządku rosnącym,
2) każda cyfra nieparzysta poprzedza (niekoniecznie bezpośrednio) cyfrę od niej o 1 większą, np. 1527**3468**.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

644. Rzucamy dwa razy symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczby oczek nie jest mniejsza od 11.

645. **(0 – 2)** Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba oczek w pierwszym rzucie jest o 1 mniejsza od liczby oczek w drugim rzucie.
CKE, matura – poziom podstawowy, czerwiec 2011

646. Z każdego z trzech zbiorów $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{7, 8, 9, 10\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania trzech liczb parzystych.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

592. Jest mniejsza o 40 %.

593. a) 380 razy; b) 0; c) 0.
Wskazówka. d) $119=7\cdot 17$.

594. Jest mniejsza od 500 (równa jest 441).
Rozwiązanie. Łatwo uzasadnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $\binom{n}{n-1}=n$. Dana suma jest więc równa $1+3+5+\ldots+39+41$. Kolejne składniki sumy są kolejnymi wyrazami 21-wyrazowego ciągu arytmetycznego. Korzystając ze wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, otrzymujemy $\frac{1+41}{2}\cdot 21=21^2=441$, więc dana liczba jest mniejsza od 500.

595. a) 32; b) 63.

596. $n=3$ lub $n=14$.

597. $n=7$.

598. $n\in\{4, 5\}$.

600. Granica: 1; ciąg (a_n) jest rosnący.

601. W barze „Gdańskim" (w barze „Gdańskim": 120 zestawów, w barze „Biedronka": 112 zestawów).

602. a) 36 tras; b) 72 trasy.

603. 175 razy.
Rozwiązanie. Pierwsza cyfra kodu jest parzysta, więc syn pana Nowaka może ją wybrać na 5 sposobów (*może wybrać jedną z cyfr*: 0, 2, 4, 6, 8). Suma dwóch środkowych cyfr jest równa 6, więc drugą cyfrę może wybrać na 7 na sposobów (*może wybrać jedną z cyfr*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), a po wyborze drugiej cyfry – trzecią tylko na jeden sposób. Czwartą cyfrę (tak jak pierwszą) może wybrać na 5 sposobów. Korzystając z *reguły mnożenia* stwierdzamy, że syn będzie musiał wpisać kod co najwyżej $5\cdot 7\cdot 1\cdot 5$ razy.

604. 500.

605. a) 900; b) 90; c) 1710.

606. $5\cdot 4^5$.

607. a) 40; b) 80.

608. 630.

609. 720.

610. a) 112; b) 48.

611. 32.
Rozwiązanie. $10010=2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$. Każdy niepusty podzbiór P zbioru $A=\{2, 5, 7, 11, 13\}$ wyznacza dzielnik liczby 10010 – równy iloczynowi liczb należących do zbioru P. Dzielnikiem jest także 1. Liczba dzielników liczby 10010 jest równa liczbie podzbiorów zbioru A:
$1+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=32.$

612. Na czterdzieści sposobów.

613. 12.
Rozwiązanie. n – liczba uczestników turnieju. Liczba rozegranych partii jest równa liczbie możliwych wyborów dwóch spośród n szachistów. Dwóch szachistów możemy wybrać na $\binom{n}{2}$ sposobów, zatem n jest rozwiązaniem równania $\binom{n}{2}=66$, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 1. Otrzymane równanie sprowadzamy do postaci $n^2-n-132=0$. Równanie $n^2-n-132=0$ spełniają liczby -11 i 12. Zatem $n=12$.

614. a) $4!$; b) $4\cdot 4!$.

615. a) 3^8; b) $2^4\cdot 3^4$; c) 18.
Rozwiązanie. c) Suma wszystkich liczb zapisanych na kartkach jest równa 36, więc suma liczb znajdujących się w każdej szufladzie musi wynosić 12. Zauważmy, że kartka z liczbą 8 musi się znaleźć z kartką z liczbą 4 albo z kartkami z liczbami 1 i 3. Jeżeli liczby 8 i 4 będą w jednej szufladzie, to liczba 7 musi się znaleźć z liczbą 5 albo z liczbami 2 i 3. Jeżeli liczby 8, 1 i 3 będą w jednej szufladzie, to liczba 7 musi się znaleźć z liczbą 5. Wobec tego mamy trzy możliwości podziału kartek na trzy podzbiory w taki sposób, aby suma liczb zapisanych na kartkach należących do jednego podzbioru była równa 12: 1) $\{8, 4\}, \{7,5\}, \{1, 2, 3, 6\}$, 2) $\{8, 4\}, \{7, 2, 3\}, \{1, 5, 6\}$, 3) $\{8, 1, 3\}, \{7,5\}, \{2, 4, 6\}$. Po dokonaniu podziału kartek na trzy podzbiory, można je umieścić w szufladach na $3!$ sposobów. Zatem kartki w żądany sposób można rozmieścić na $3\cdot 3!$ sposobów.

616. a) 288; b) 288.
Rozwiązanie. b) Panie mogły zająć miejsca w jednym z dwóch rzędów i mogły usiąść w jednym rzędzie na $4\cdot 3\cdot 2$ (=24) sposoby. Po zajęciu miejsc przez panie, panowie mogą zająć miejsca na $3\cdot 2$ (=6) sposobów. Zatem osoby mogły zająć miejsca tak, aby vis-à-vis każdego z panów siedziała pani, na $2\cdot 24\cdot 6$ sposobów.

617. a) 125; b) 60; c) 10.

618. a) 30240; b) 6720.

Rozwiązanie. b) Każda permutacja zbioru A jest ośmiowyrazowym ciągiem. Trzy miejsca w tym ciągu dla liczb 1, 2, 3 można wybrać na $\binom{8}{3}$ sposobów i każdy wybór trzech miejsc w sposób jednoznaczny określa którymi wyrazami ciągu są liczby 1, 2, 3. Po wybraniu miejsc dla liczb 1, 2, 3, pozostałe pięć liczb można permutować na 5! sposobów. Zatem szukana liczba permutacji jest równa $\binom{8}{3}\cdot 5!$ (=6720).

619. a) 840; b) 1200.

620. a) 34650; b) 9450.

Rozwiązanie. a) Cztery osoby, które miały umyć okna, można było wybrać na $\binom{12}{4}$ sposobów. Czwórkę, która miała myć ławki, można było wybrać spośród pozostałych uczniów na $\binom{8}{4}$ sposobów. Pozostałe cztery osoby utworzyły wtedy grupę, która porządkowała biblioteczkę. Zatem uczniowie mogli dokonać podziału na trzy 4-osobowe grupy na $\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}$ sposobów. b) Do pracy razem z Martą i Wojtkiem można było dokooptować dwie osoby na $\binom{10}{2}$ sposobów. Cztery kolejne osoby, które były przydzielone do innej 4-osobowej grupy, można było wybrać na $\binom{8}{4}$ sposobów. Pozostałe cztery osoby utworzyły wtedy trzecią grupę. Marcie i Wojtkowi można było przydzielić do wykonania jedną z trzech prac (*mycie okiem albo mycie ławek albo porządkowanie biblioteczki*). Zatem szukana liczba podziałów jest równa $3\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{4}$.

621. a) 462; b) 5775; c) 210; d) 1575; e) 4200.

Rozwiązanie. a) Przyjmijmy, że dziewczęta na treningu grają w koszulkach z numerami od 1 do 12. Wybierając sześć dziewcząt z tej dwunastoosobowej grupy, otrzymamy podział na dwa 6-osobowe zespoły. Jeśli np. wybierzemy dziewczyny z numerami 1, 2, 3, 4, 5, 6, to drugi zespół będą tworzyły dziewczyny z numerami 7, 8, 9, 10, 11, 12. Zauważmy, że podział na takie same zespoły otrzymamy także wtedy, gdy wybierzemy dziewczyny z numerami 7, 8, 9, 10, 11, 12. Wyboru sześciu dziewcząt możemy dokonać na $\binom{12}{6}$ sposobów. Zatem liczba wszystkich możliwych podziałów na dwa 6-osobowe zespoły jest równa $\binom{12}{6}:2$. b) Przyjmijmy, że dziewczęta na treningu grają w koszulkach z numerami od 1 do 12. Aby otrzymać podział grupy na trzy 4-osobowe zespoły możemy wybrać najpierw 4 dziewczyny (*można to uczynić na* $\binom{12}{4}$ *sposobów*), a z pozostałych ośmiu ponownie wybrać 4 dziewczyny (*można to uczynić na* $\binom{8}{4}$ *sposobów*), dziewczyny, które nie zostały wybrane utworzą trzeci zespół. Jeśli np. najpierw wybierzemy dziewczyny z numerami na koszulkach 1, 2, 3, 4, następnie wybierzemy dziewczyny z numerami 5, 6, 7, 8, to trzeci zespół będą tworzyły dziewczyny z numerami 9, 10, 11, 12.
Zauważmy, że podział na takie same trzy zespoły powstaną także wtedy, gdy wybierzemy najpierw dziewczyny z numerami na koszulkach 5, 6, 7, 8, a następnie dziewczyny z numerami 1, 2, 3, 4 albo najpierw dziewczyny z numerami na koszulkach 9, 10, 11, 12, a następnie dziewczyny z numerami 1, 2, 3, 4 itd. Kolejność wyboru zespołów nie ma tu znaczenia, zatem podziału na trzy 4-osobowe zespoły można dokonać na $\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}:3!$ sposobów. c) Do zespołu Krysi i Uli cztery siatkarki można dobrać na $\binom{10}{4}$ sposobów. Pozostałe sześć dziewcząt utworzy drugi zespół. Zatem liczba szukanych podziałów jest równa $\binom{10}{4}$ (=210).

d) Do zespołu Krysi i Uli dwie siatkarki można dobrać na $\binom{10}{2}$ sposobów. Pozostałe osiem dziewcząt można podzielić na dwa czteroosobowe zespoły na $\binom{8}{4}:2$ sposobów (*patrz rozwiązanie punktu* a)). Zatem liczba szukanych podziałów jest równa $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{4}:2$ (=1575).

e) Do zespołu Krysi trzy siatkarki można dobrać na $\binom{10}{3}$ sposobów. Gdy zespół Krysi jest już skompletowany, do zespołu Uli trzy dziewczyny możemy wybrać na $\binom{7}{3}$ sposobów. Pozostałe cztery dziewcząt utworzy trzeci zespół. Liczba szukanych podziałów jest równa $\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{3}$.

622. Na 35 sposobów. **623.** a) 729; b) 90. **624.** a) $\frac{1}{2}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{3}=70$; b) $\frac{1}{6}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}=105$.