7.51. Kąt zewnętrzny wielokąta foremnego jest równy 18°. Ile przekątnych ma ten wielokąt?

7.52. W jakim wielokącie wypukłym stosunek sumy miar kątów wewnętrznych do sumy miar wszystkich kątów zewnętrznych jest równy:

a) 4 b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{15}{4}$?

7.53. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów, $n \geq 3$, z których dowolne trzy nie są współliniowe. Wyznacz n, wiedząc, że liczba wszystkich odcinków łączących te punkty jest równa:

a) 21 b) 45 c) 55 d) 78.

7.54. Różnica liczby boków dwóch wielokątów jest równa 1, a różnica liczby przekątnych tych wielokątów jest równa 16. Jakie to wielokąty?

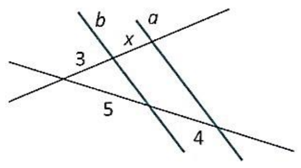
7.55. Czy istnieje dziewięciokąt wypukły, który ma cztery kąty proste? Odpowiedź uzasadnij.

7.56. Ile, co najwyżej, kątów ostrych może mieć dowolny wielokąt wypukły?

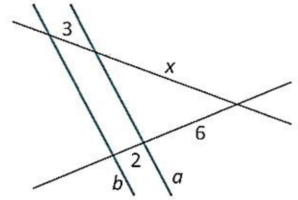
Twierdzenie Talesa

7.57. Na rysunkach poniżej proste a i b są równoległe. Oblicz x.

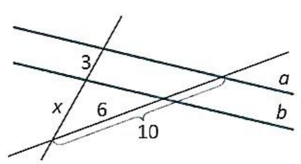
a)



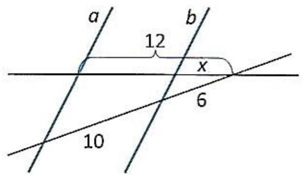
b)



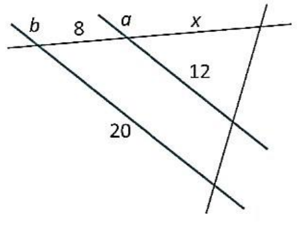
c)



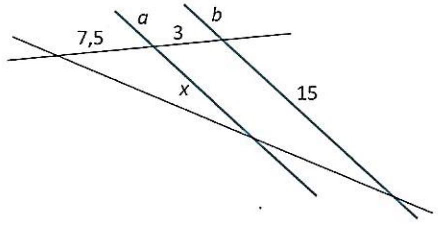
d)



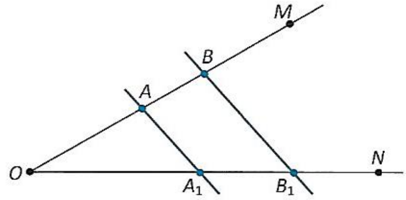
e)



f)



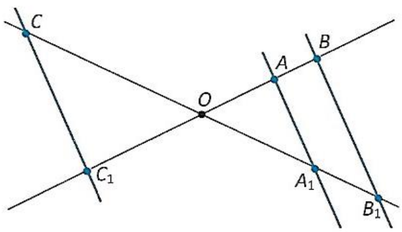
7.58. Ramiona kąta MON przecięto prostymi równoległymi AA_1 i BB_1, jak na rysunku poniżej:



Oblicz:

a) $|AB|$, jeśli $|OA| = 17$ cm, $|OA_1| = 2$ dm, $|OB_1| = 49$ cm
b) $|OA|$, jeśli $|OB| = 10{,}5$ cm, $|OA_1| = 38$ mm, $|A_1B_1| = 0{,}95$ dm
c) $|OB_1|$, jeśli $|OA| = 16$ cm, $|AB| = 4{,}8$ dm, $|A_1B_1| = 0{,}4$ m
d) $|A_1B_1|$, jeśli $|OA| = 6{,}3$ cm, $|AB| = 8{,}7$ cm, $|OB_1| = 22{,}5$ cm.

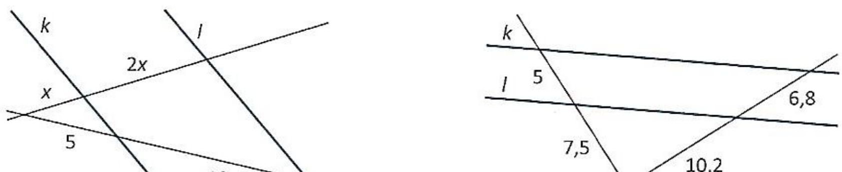
7.59. Proste AB i A_1B_1 przecięto prostymi równoległymi AA_1, BB_1 i CC_1, jak na rysunku poniżej:



Oblicz:

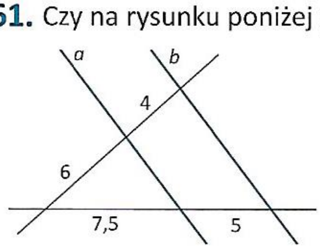
a) $|CC_1|$, jeśli $|C_1O| = 4$ cm, $|OA| = 3$ cm, $|AA_1| = 2$ cm
b) $|OC_1|$, jeśli $|OA_1| = 1{,}8$ dm, $|AC_1| = 11{,}2$ dm, $|OC| = 5{,}4$ dm
c) $|OB|$, jeśli $|CC_1| = 4$ dm, $|BB_1| = 56$ cm, $|C_1B| = 1{,}2$ m
d) $|CA_1|$, jeśli $|AA_1| = 2$ cm, $|BB_1| = 5$ cm, $|A_1B_1| = 4{,}5$ cm, $|CC_1| = 4$ cm.

D **7.60.** Wykaż, że proste k i l na rysunku poniżej są równoległe.

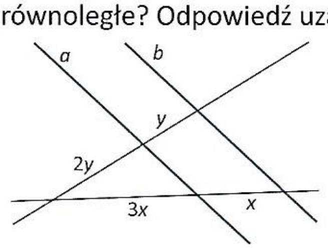


7.61. Czy na rysunku poniżej proste a i b są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

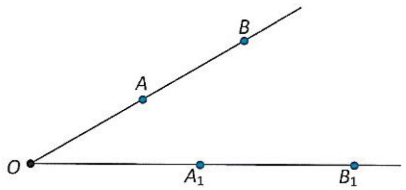
a)



b)



7.62. Na jednym z ramion kąta o wierzchołku O leżą punkty A i B, a na drugim ramieniu – punkty A_1 i B_1 (patrz rysunek poniżej).



Czy proste AA_1 i BB_1 są równoległe, jeśli:

a) $|OA| = 4{,}2$ dm, $|AB| = 2$ dm, $|OA_1| = 6{,}3$ dm, $|OB_1| = 9{,}3$ dm

b) $|OA| = 6{,}8$ cm, $|OB| = 22{,}8$ cm, $|OB_1| = 28{,}5$ cm, $|A_1B_1| = 20$ cm.

7.63. Dane są odcinki, których długości są równe a i b, $a > b$. Skonstruuj odcinek, którego długość będzie równa:

a) $\frac{1}{5}a$ b) $\frac{2b}{3}$ c) $\frac{3(a+b)}{7}$

d) $\frac{b^2}{a}$ e) $\frac{ab}{a-b}$ f) $\frac{a^2}{a+b}$.

7.64. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel CD$, mamy dane: $|AB| = 12$ cm, $|CD| = 7$ cm, $|AD| = 8$ cm. O ile należy wydłużyć ramię AD, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia BC?

7.65. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przedłużono ramiona AD i BC do przecięcia się w punkcie E. Oblicz CE, jeśli $|AD| = 1$ dm, $|BC| = 1{,}5$ dm, $|DE| = 2$ dm.

7.66. Na boku AC trójkąta ABC obrano punkt K tak, że $\frac{|CK|}{|AK|} = \frac{3}{4}$. Przez punkt K poprowadzono prostą równoległą do boku AB. Przecięła ona bok BC trójkąta w punkcie L. Oblicz $|BL|$ i $|LC|$, jeśli $|BC| = 49$ cm.

7.67. Na boku AC trójkąta ABC obrano punkt M tak, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{5}{7}$. Przez punkt M poprowadzono prostą, równoległą do boku AB trójkąta, która przecięła bok BC w punkcie N. Wiedząc, że $|AC| = 24$ cm i $|AB| = 20$ cm, oblicz $|MN|$ oraz $\frac{|CN|}{|CB|}$.

a) 4 cm, 5 cm, 6 cm
b) 10 cm, 7 cm, 7 cm
c) $2\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm, $10\sqrt{0,36}$ cm
d) $(\sqrt{2}+1)$ cm, $(\sqrt{2}-1)$ cm, $2\sqrt{2}$ cm.

7.108. Sprawdź, czy dany trójkąt jest prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny, jeśli długości jego boków pozostają w stosunku:

a) $4:3:5$
b) $2:3:4$
c) $2:1:\sqrt{5}$
d) $\sqrt{10}:\sqrt{6}:\sqrt{5}$.

Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie

7.109. Obwód trójkąta *ABC* wynosi 21 cm. Wysokość *CD* dzieli go na dwa trójkąty, których obwody wynoszą odpowiednio 12 cm i 15 cm. Oblicz wysokość *CD*.

7.110. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, którego wysokość ma długość:

a) $2\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{6}$
c) 15
d) $\sqrt{2}$.

7.111. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego wiedząc, że jest on o 1 dłuższy od wysokości tego trójkąta. Wynik przedstaw w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi.

7.112. Oblicz długość boku trójkąta prostokątnego równoramiennego wiedząc, że najkrótsza wysokość tego trójkąta jest o 1 krótsza od pozostałych wysokości. Wynik przedstaw w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi.

7.113. W trójkącie prostokątnym wysokości mają długość: 12 cm, 15 cm, 20 cm. Jaką długość mają odcinki, na które spodek wysokości, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego, podzielił przeciwprostokątną?

7.114. W trójkącie prostokątnym poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Spodek wysokości podzielił przeciwprostokątną na odcinki długości a i b. Oblicz tę wysokość.

a) $a = 5$ cm $\quad b = 2$ dm
b) $a = 0,2$ dm $\quad b = 1\frac{1}{4}$ dm
c) $a = \sqrt{2}$ cm $\quad b = \sqrt{18}$ cm
d) $a = 2\sqrt{3\frac{1}{16}}$ dm $\quad b = 1,4$ m

7.115. W trójkącie równoramiennym o obwodzie 32 cm wysokość poprowadzona na podstawę jest równa 8 cm. Oblicz długość boków tego trójkąta.

7.116. Oblicz miary kątów trójkąta prostokątnego *ABC*, wiedząc, że środkowa i wysokość poprowadzone z wierzchołka *C* dzielą kąt prosty *C* na trzy równe części.

7.117. W trójkącie prostokątnym równoramiennym przyprostokątna ma długość 4. Oblicz długość środkowych tego trójkąta.

7.118. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 6 cm i 8 cm. Oblicz różnicę długości środkowej i wysokości tego trójkąta, poprowadzonych z wierzchołka kąta prostego.

7.119. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 16 cm i 12 cm. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od wierzchołka kąta prostego.

7.120. W trójkącie równoramiennym boki mają długość 13 cm, 13 cm, 10 cm. Oblicz długość środkowych w tym trójkącie.

7.121. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 30 cm. Środek ciężkości tego trójkąta znajduje się w odległości $2\frac{2}{3}$ cm od podstawy. Oblicz obwód danego trójkąta.

D **7.122.** W trójkącie *ABC* poprowadzono wysokości *BD* i *CE*. Wykaż, że miary kątów *ABD* i *ACE* są równe.

D **7.123.** Wykaż, że jeżeli jedna z wysokości trójkąta jest jednocześnie środkową tego trójkąta, to ten trójkąt jest równoramienny.

D **7.124.** W trójkącie *ABC* na wysokości *CD* wybrano punkt *H* taki, że $|\sphericalangle AHD| = |\sphericalangle ABC|$. Wykaż, że proste *AH* i *BC* są prostopadłe.

D **7.125.** Udowodnij, że jeżeli środkowa trójkąta równa się połowie boku, do którego została poprowadzona, to trójkąt jest prostokątny.

D **7.126.** W trójkącie *ABC* kąt przy wierzchołku *A* ma miarę α, zaś kąt przy wierzchołku *B* – miarę β, przy czym $\alpha < \beta$. Wykaż, że kąt między wysokością poprowadzoną z wierzchołka *C* i dwusieczną kąta przy wierzchołku *C* jest równy $\frac{\beta - \alpha}{2}$. Rozważ trzy przypadki, gdy kąt przy wierzchołku *B* jest kątem ostrym, prostym lub rozwartym.

7.127. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 13$ cm, $|BC| = 14$ cm, $|AC| = 15$ cm. Niech D oznacza spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Oblicz $|CD|$.

7.128. W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta jest równa a. Wyznacz wysokość opuszczoną na podstawę.

7.129. W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD. Wierzchołek A połączono odcinkiem ze środkiem E środkowej CD i przedłużono go aż do przecięcia w punkcie F z bokiem CB. Oblicz $\frac{|CF|}{|FB|}$.

D **7.130.** Wykaż, że w dowolnym trójkącie ABC prawdziwa jest podwójna nierówność

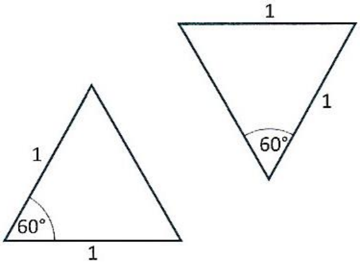
$$\frac{3(a+b+c)}{4} < s_a + s_b + s_c < a + b + c,$$

gdzie a, b, c oznaczają długości odpowiednich boków trójkąta, s_a, s_b, s_c – długości środkowych poprowadzonych odpowiednio do boków o długościach a, b, c.

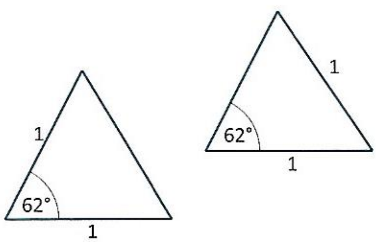
Przystawanie trójkątów

7.131. Czy trójkąty w poniższych parach są przystające? Odpowiedź uzasadnij.

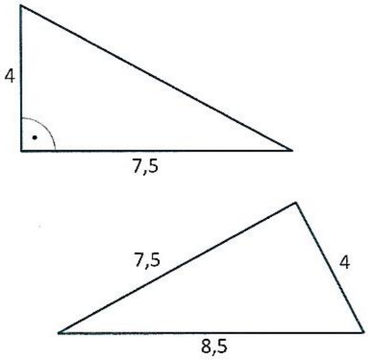
a)



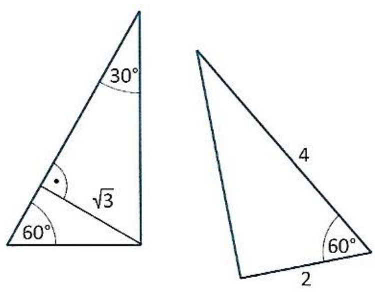
b)



c)



d)



D 7.132. Udowodnij, że dwa trójkąty prostokątne są przystające, jeżeli przyprostokątna i przeciwległy jej kąt ostry jednego trójkąta równają się przyprostokątnej i przeciwległemu kątowi ostremu drugiego trójkąta.

D 7.133. W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne BD i B_1D_1. Wykaż, że jeśli $|BC| = |B_1C_1|$, $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$ i $|BD| = |B_1D_1|$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

D 7.134. W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono środkowe BD i B_1D_1. Wykaż, że jeżeli $|BD| = |B_1D_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$ oraz $|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle D_1B_1C_1|$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

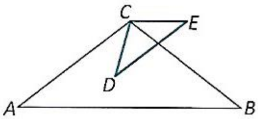
D 7.135. W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne CD i C_1D_1. Wykaż, że $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, wiedząc, że $|CD| = |C_1D_1|$, $|DA| = |D_1A_1|$ oraz $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle C_1D_1A_1|$.

D 7.136. W trójkątach ostrokątnych ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono wysokości CD i C_1D_1. Wykaż, że $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, jeżeli $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A_1|$, $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$ i $|CD| = |C_1D_1|$.

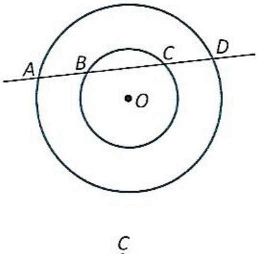
D 7.137. Na jednej z dwóch prostych przecinających się w punkcie O zaznaczamy punkty A, B w taki sposób, że punkt O jest środkiem odcinka AB. Na drugiej prostej zaznaczamy punkty C, D w taki sposób, że punkt O jest również środkiem odcinka CD. Wykaż, że pr. $AC \parallel$ pr. BD.

D 7.138. W trójkącie równobocznym o boku a przedłużono bok AC poza punkt A o odcinek AA_1, $|AA_1| = 1$, bok AB poza punkt B o odcinek BB_1, $|BB_1| = 1$, bok BC poza punkt C o odcinek CC_1, $|CC_1| = 1$. Udowodnij, że trójkąt $A_1B_1C_1$ jest równoboczny.

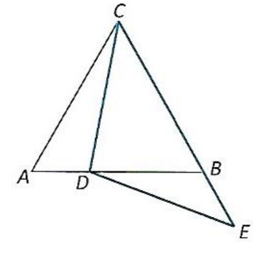
D 7.139. Trójkąty ABC i CDE są równoramienne, $|AC| = |BC|$, $|CD| = |CE|$ oraz $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE|$. Wykaż, że $|AD| = |BE|$.



D 7.140. Prosta przecina dwa okręgi współśrodkowe odpowiednio w punktach A, D i B, C, jak na rysunku obok. Wykaż, że $|AB| = |CD|$.



D 7.141. Punkt D należy do boku AB trójkąta równobocznego ABC (zobacz rysunek obok). Bok CB przedłużono poza punkt B do punktu E. Wykaż, że jeśli $|BE| = |AD|$, to trójkąt CDE jest równoramienny.



D **7.142.** Na bokach AB, BC i CA trójkąta równobocznego ABC zaznaczono odpowiednio punkty E, F, D tak, że $|AE| = |BF| = |CD| = \frac{1}{3}|AB|$. Wykaż, że trójkąt EFD jest równoboczny oraz że boki tego trójkąta są prostopadłe do boków trójkąta ABC.

7.143. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkty P, Q, R leżą na bokach trójkąta ABC (po jednym punkcie na każdym boku) w taki sposób, że każdy bok trójkąta PQR jest prostopadły do jednego boku trójkąta ABC.

D a) Wykaż, że trójkąt PQR jest równoboczny.

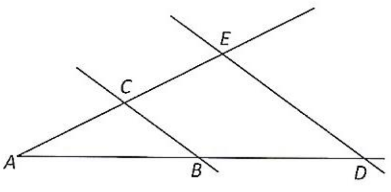
b) Wyznacz stosunek $\frac{|AB|}{|PQ|}$.

D **7.144.** Na bokach trójkąta równobocznego ABC odkładamy odcinki równej długości: AD na boku AB, BE na boku BC i CF na boku CA. Następnie prowadzimy odcinki AE, BF i CD. Wykaż, że punkty przecięcia tych odcinków wyznaczają trójkąt równoboczny.

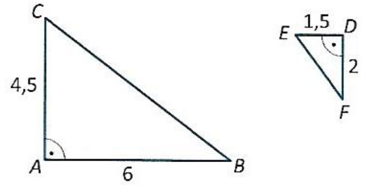
Podobieństwo trójkątów

7.145. Czy dane trójkąty są podobne? Odpowiedź uzasadnij.

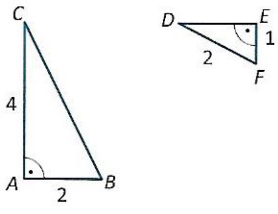
a) ΔABC i ΔADE, jeśli $ED \parallel CB$



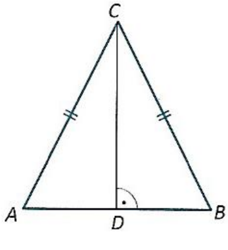
b) ΔABC i ΔDEF



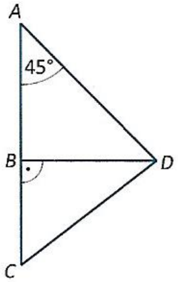
c) ΔABC i ΔDEF



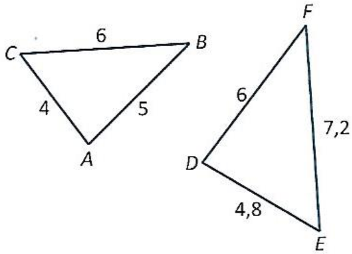
d) ΔADC i ΔBDC



e) ΔABD i ΔBCD, jeśli $|AB| \neq |BC|$

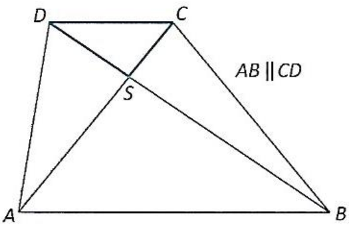


f) ΔABC i ΔDEF

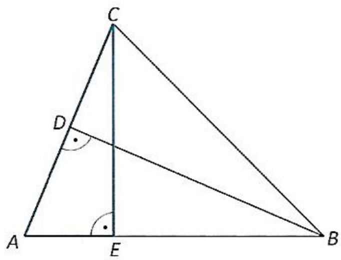


7.146. Wykaż podobieństwo trójkątów:

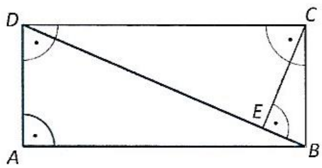
a) ΔABS i ΔCDS



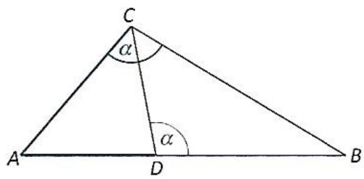
b) ΔABD i ΔAEC



c) ΔABD i ΔDEC

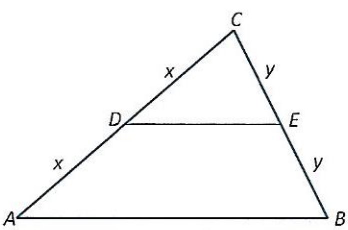


d) ΔABC i ΔCDB

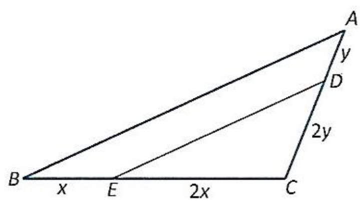


7.147. Wykaż, że trójkąt ABC jest podobny do wskazanego poniżej trójkąta i podaj skalę tego podobieństwa.

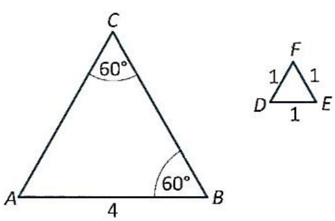
a) ΔDEC



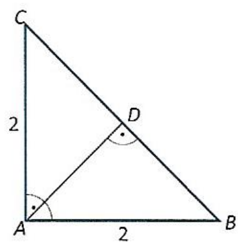
b) ΔDEC



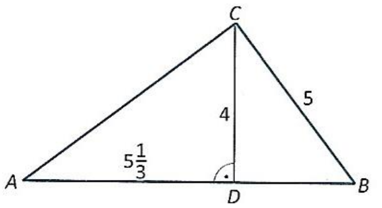
c) ΔDEF



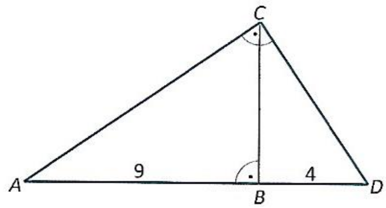
d) ΔABD



e) ΔCDB

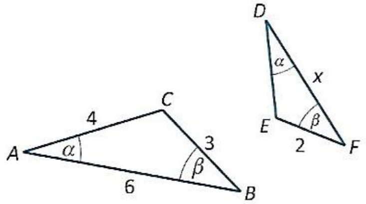


f) ΔADC

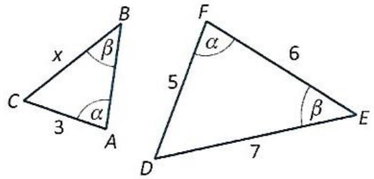


7.148. Na rysunku poniżej trójkąty ABC i DEF są podobne. Wyznacz długość x.

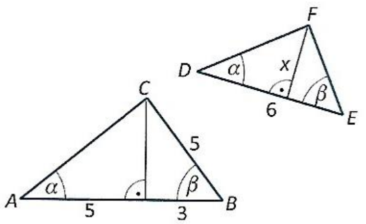
a)



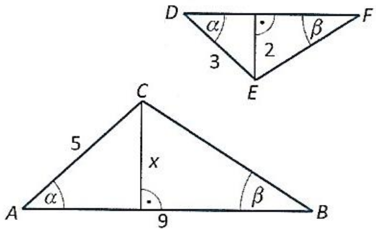
b)



c)



d)



7.149. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość $|CA| = 5{,}5$ cm, $|CB| = 30$ cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC, a $|A_1B_1| = 122$ cm. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta $A_1B_1C_1$.

7.150. Obwód trójkąta ABC jest równy 9 cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $k = 4$, a dwa jego boki mają długość: $|A_1B_1| = 10$ cm, $|A_1C_1| = 12$ cm. Oblicz długość boków trójkąta ABC.

Podobieństwo trójkątów – zastosowanie w zadaniach

7.151. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|AC| = 12$ cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC i jego obwód jest równy 6 cm. Oblicz:

a) skalę podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC

b) długości boków trójkąta $A_1B_1C_1$.