Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

10.47. a) 2401 b) 840 c) 35 d) 77 (10.1R)

a) Wszystkich funkcji jest tyle, ile czterowyrazowych ciągów o wartościach ze zbioru siedmioelementowego, czyli 7^4;
b) liczba różnowartościowych ciągów czterowyrazowych o wartościach ze zbioru siedmioelementowego jest równa $7\cdot6\cdot5\cdot4$ (**10.5**);

c) spośród siedmiu liczb wybieramy 4 liczby (które są wartościami takiej funkcji) na $\binom{7}{4}$ sposobów (zobacz **10.7**), następnie wybrane liczby można ustawić w kolejności od najmniejszej do największej na jeden sposób; zatem liczba tych funkcji jest równa $\binom{7}{4}\cdot1$, czyli 35;

d) funkcji malejących jest tyle samo, ile funkcji rosnących; ponadto jest siedem funkcji stałych, stąd mamy $2\cdot35+7$ funkcji ściśle monotonicznych.

10.48. 32 dzielniki (10.1R)

I sposób – Liczba a jest iloczynem pięciu różnych liczb pierwszych. Każdy dzielnik liczby a jest wyznaczany przez pewną kombinację (**10.7**) zbioru $\{7,11,13,17,19\}$. Kombinacji 1-elementowych jest $\binom{5}{1}$, czyli 5. Odpowiadają im dzielniki będące liczbami pierwszymi. Kombinacji 2-elementowych jest $\binom{5}{2}$, czyli 10. Odpowiadają im dzielniki będące iloczynami dwóch liczb pierwszych, itd. Wszystkich dzielników liczby a jest $\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}+\binom{5}{0}$, czyli 32. (ostatnie dwa składniki sumy odpowiadają kolejno liczbie a i liczbie 1).

II sposób – Każdemu dzielnikowi liczby a można przyporządkować 5-owyrazowy ciąg złożony z zer i jedynek. Na przykład:
7 11 13 17 19
$(0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1)$ – temu ciągowi odpowiada dzielnik $11\cdot13\cdot19$
$(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ – temu ciągowi odpowiada dzielnik 7
$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ – temu ciągowi odpowiada dzielnik 1.
Zauważamy, że każdemu dzielnikowi odpowiada jeden ciąg i każdemu ciągowi odpowiada jeden dzielnik. Zatem wszystkich dzielników jest tyle, ile jest 5-wyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru $\{0,1\}$ (tzn. 5-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru 2-elementowego), czyli 2^5.

10.49. 693 liczb (10.1R)

Korzystamy z (**10.7**). Mamy sześć grup liczb siedmiocyfrowych:

1) Liczby, w których zapisie występują: dwie cyfry 2, dwie cyfry 3, i trzy cyfry 1. Takich liczb jest $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}$, czyli 210.

2) Liczby, w których zapisie występują: dwie cyfry 3, cztery cyfry 1, jedna cyfra 4. Takich liczb jest $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{1}$, czyli 105.

3) Liczby, w których zapisie występują cyfry: 6, 2, 3 i cztery cyfry 1. Takich liczb jest $\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}$, czyli 210.

4) Liczby, w których zapisie występują: dwie cyfry 2, cyfra 9 i cztery cyfry 1. Takich liczb jest $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{1}$, czyli 105.

5) Liczby, w których zapisie występują cyfry: 4 i 9 oraz pięć cyfr 1. Takich liczb jest $\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{1}$, czyli 42

6) Liczby, w których zapisie występują dwie cyfry 6 i pięć cyfr 1. Takich liczb jest $\binom{7}{2}$, czyli 21. Wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest: $210+105+210+105+42+21$, czyli 693.

10.50. 262080 napisów (10.1R)

Napisów sześcioliterowych złożonych z różnych liter pierwszej grupy ośmioliterowej można utworzyć $\binom{8}{6}\cdot6!$, czyli 20160.

Liczbę napisów sześcioliterowych złożonych z różnych liter drugiej grupy ośmioliterowej wyznaczamy na dwa sposoby:

I sposób – bezpośrednio wyznaczamy liczbę nowych napisów. Druga grupa od pierwszej różni się jedną literą. Zatem nowe napisy muszą zawierać tę nową literę i pięć liter z poprzedniej grupy ośmioliterowej. Jest ich więc $\binom{7}{5}\cdot 6!$ czyli 15120.

II sposób – Od liczby wszystkich napisów utworzonych z liter drugiej grupy odejmujemy liczbę napisów utworzonych w ramach pierwszej grupy. Otrzymujemy $\binom{8}{6}\cdot 6!-\binom{7}{6}\cdot 6!$, czyli 15120 nowych napisów.

Wszystkich grup ośmioliterowych jest 17, zatem wszystkich napisów jest $20160+16\cdot 15120$, czyli 262080. W obliczeniach skorzystaliśmy ze wzorów (**10.7b**) i (**10.3**).

10.51. 427 liczb (10.1R)

Korzystamy z reguły (**10.1**) i (**10.2**). Mamy cztery różne przypadki ze względu na cyfry różne od zera występujące w zapisie liczby ośmiocyfrowej.

1) $6=2+2+2$ – w zapisie liczby występują trzy dwójki i pięć zer. Na początku dwójka, miejsca na pozostałe dwie dwójki wybieramy na $\binom{7}{2}$ sposobów, na ostatnich pięciu miejscach są zera. Takich liczb jest więc $\binom{7}{2}$, czyli 21.

2) $6=2+2+1+1$ – w zapisie liczby występują dwie dwójki, dwie jedynki i cztery zera. Jeśli na początku jest dwójka, to miejsce na drugą dwójkę możemy wybrać na $\binom{7}{1}$ sposobów, a na jedynki – na $\binom{6}{2}$ sposobów. Na ostatnich czterech miejscach są zera. Zatem takich liczb jest $\binom{7}{1}\binom{6}{2}$. Jeśli na początku będzie jedynka, to takich liczb też będzie $\binom{7}{1}\binom{6}{2}$. Tak więc w przypadku 2) mamy $2\cdot\binom{7}{1}\binom{6}{2}$, czyli 210 liczb.

3) $6=2+1+1+1+1$ – w zapisie liczby występują cztery jedynki, jedna dwójka i trzy zera. Takich liczb jest $\binom{7}{4}+\binom{7}{3}\binom{4}{1}$, czyli 175.

4) $6=1+1+1+1+1+1$ – w zapisie liczby występuje sześć jedynek i dwa zera. Takich liczb jest $\binom{7}{5}$, czyli 21.

Wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest $21+210+175+21$, czyli 427.

10.52. $\binom{4}{1}\binom{13}{4}\binom{13}{1}^3+\binom{4}{1}\binom{13}{3}\binom{3}{1}\binom{13}{2}\binom{13}{1}^2+\binom{4}{3}\binom{13}{2}^3\binom{13}{1}$ (10.1R)

Korzystamy z reguły (**10.1**) i (**10.2**). Ze względu na liczbę kart w tym samym kolorze możemy wyróżnić trzy przypadki: a) 4, 1, 1, 1 (tzn. 4 karty są w jednym kolorze, a z pozostałych trzech, każda jest w innym kolorze); b) 3, 2, 1, 1; c) 2, 2, 2, 1. W przypadku a) mamy $\binom{4}{1}\binom{13}{4}\binom{13}{1}^3$ możliwości, gdzie $\binom{4}{1}$ oznacza liczbę sposobów wyboru koloru, w którym będą cztery karty; $\binom{13}{4}$ oznacza liczbę możliwości wyboru czterech kart w tym kolorze; $\binom{13}{1}^3$ oznacza liczbę możliwości wyboru po jednej karcie, w każdym z trzech pozostałych kolorów. W przypadku b) mamy $\binom{4}{1}\binom{13}{3}\binom{3}{1}\binom{13}{2}\binom{13}{1}^2$ możliwości, a w przypadku c) jest $\binom{4}{3}\binom{13}{2}^3\binom{13}{1}$ możliwości. Na mocy (**10.1**) liczba wszystkich możliwości jest sumą liczb z przypadków a), b), c).

10.53. Bardziej prawdopodobne jest uzyskanie 11 oczek. (10.2P, 10.3P)

Oznaczamy: $\Omega=\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3):\omega_i\in\{1,2,...,6\}, i\in\{1,2,3\}\}$, $|\Omega|=6^3=216$ (**10.4**). Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. A – zdarzenie „suma wyrzuconych oczek jest równa 11", B – „suma wyrzuconych oczek jest równa 12". Sumę 11 można uzyskać na sześć sposobów, ale sumom: $1+4+6$, $2+4+5$, $2+6+3$ odpowiada po 6 zdarzeń elementarnych, natomiast sumom $1+5+5$, $4+4+3$, $3+3+5$ odpowiadają po 3 zdarzenia elementarne. Mamy więc $|A|=3\cdot 6+3\cdot 3=27$. Wynik 12 można uzyskać na sześć sposobów, ale sumom $1+5+6$, $2+4+6$, $3+4+5$ odpowiadają po 3 zdarzenia elementarne, sumom $2+5+5$ i $3+3+6$ odpowiadają po 3 zdarzenie elementarne, natomiast sumie $4+4+4$

odpowiada tylko 1 zdarzenie elementarne. Zatem $|B|=3\cdot6+2\cdot3+1=25$. Ze wzoru (**10.10**) otrzymujemy $P(A)=\frac{27}{216}$, $P(B)=\frac{25}{216}$, $P(A)>P(B)$.

10.54. $\frac{13}{16}$ (10.3P)

Oznaczamy: A - zdarzenie „reszka wypadła co najwyżej 3 razy"; A' - zdarzenie „reszka wypadła co najmniej 4 razy, czyli 4 razy lub 5 razy"; $|\Omega|=2^5$, wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. $P(A)=1-P(A')$. Niech A_1 - zdarzenie, że reszka wypadła 5 razy, wówczas $|A_1|=1$, A_2 - zdarzenie, że reszka wypadła 4 razy; wówczas $|A_2|=5$; $A_1\cup A_2=A'$; $A_1\cap A_2=\varnothing$. Stąd $|A'|=6$, zatem $P(A')=\frac{6}{2^5}=\frac{3}{16}$, wobec tego $P(A)=\frac{13}{16}$. W rozwiązaniu skorzystaliśmy z własności (**10.9d**), (**10.10**), (**10.8c**).

10.55. $\frac{2}{9}$ (10.1R, 10.3P)

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa liczbie wszystkich 9-elementowych permutacji bez powtórzeń (**10.3**), czyli $|\Omega|=9!$; zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Niech A oznacza zdarzenie, że utworzona liczba jest podzielna przez 4. Na podstawie cechy podzielności przez 4 wypisujemy wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach, nie zawierające w zapisie 0 i podzielne przez 4: 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96; jest 16 takich liczb. Pozostałe cyfry możemy dowolnie przestawiać na 7! sposobów. Z reguły (**10.2**) otrzymujemy $|A|=7!\cdot16$, skąd $P(A)=\frac{7!\cdot16}{9!}=\frac{2}{9}$ (**10.10**).

10.56. 0,125 (10.2R, 10.3P)

Przestrzeń Ω jest zbiorem 3-wyrazowych ciągów o wartościach ze zbioru {1, 2, 3, ..., 8}; $|\Omega|=8^3$; wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Badamy reszty z dzielenia kwadratów kolejnych liczb naturalnych przez 4: $(4n)^2=16n^2$, $r_1=0$; $(4n+1)^2=16n^2+8n+1$, $r_2=1$; $(4n+2)^2=16n^2+16n+4$, $r_3=0$, $(4n+3)^2=16n^2+24n+9$, $r_4=1$. Zatem suma kwadratów trzech liczb jest podzielna przez 4 tylko wtedy, gdy każda z tych liczb jest parzysta. Mamy $X=\{2,4,6,8\}$; $|A|=4\cdot4\cdot4$. Wówczas $P(A)=\frac{4^3}{8^3}=0{,}125$ (**10.10**).

10.57. (10.2P, 10.3P)

Ponieważ $\Omega=\{1,2,3,4,...,3n-1,3n\}$, więc $|\Omega|=3n$. Niech A oznacza zdarzenie - „wylosowana liczba jest parzysta"; B - „wylosowana liczba jest podzielna przez 3". Mamy obliczyć $P(A-B)$, czyli $P(A)-P(A\cap B)$. Największą liczbą parzystą w danym zbiorze jest liczba $3n-1$. Zatem $|A|=\frac{3n-1}{2}$. Zdarzenie $A\cap B$ jest zdarzeniem - „wylosowana liczba jest podzielna przez 6". Ponieważ n jest liczbą nieparzystą, więc największą liczbą podzielną przez 6 w danym zbiorze jest liczba $3(n-1)$, skąd $|A\cap B|=\frac{3(n-1)}{6}=\frac{n-1}{2}$. Ze wzoru (**10.10**) otrzymujemy $P(A)-P(A\cap B)=\frac{3n-1}{2\cdot3n}-\frac{n-1}{2\cdot3n}=\frac{2n}{6n}=\frac{1}{3}$, czyli $P(A-B)=\frac{1}{3}$, c.k.d.

10.58. 120 (10.1P, 5.3P, 10.3P)

Przestrzeń Ω jest zbiorem wariacji 2-elementowych bez powtórzeń o wartościach ze zbioru $(2n+1)$-elementowego (**10.5**), więc $|\Omega|=(2n+1)\cdot2n$. Niech A oznacza zdarzenie: „za pierwszym razem wylosujemy liczbę dwa razy większą, niż za drugim razem"; wówczas pierwsza wylosowana liczba jest parzysta. Wśród danych liczb mamy n liczb parzystych: 2, 4, 6, ..., $2n$. Wobec tego $|A|=n\cdot1=n$. Otrzymujemy (**10.10**) równanie $\frac{n}{(2n+1)\cdot2n}=\frac{1}{30}$; skąd $2n+1=15$. Obliczamy $S_{15}=\frac{1+15}{2}\cdot15=120$ (**4.7b**).

10.59. (10.1R, 10.3P, 3.1R)

Niech Ω oznacza przestrzeń zdarzeń elementarnych; ze wzoru (**10.4**) otrzymujemy: $|\Omega|=(2n+1)^3$. Niech A_1 oznacza zdarzenie: „wszystkie wylosowane liczby są parzyste"; natomiast A_2 - zdarzenie „jedna wylosowana liczba jest parzysta, a dwie pozostałe są nieparzyste", $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Wówczas $|A_1| = n^3$ oraz $|A_2| = 3 \cdot n \cdot (n+1)^2$ (na trzy sposoby można wybrać kolejność wylosowania liczby parzystej). Zatem z własności (**10.8c**) i na podstawie wzoru (**1.18a**) obliczamy $p = P(A_1 \cup A_2) = \frac{n^3+3n(n+1)^2}{(2n+1)^3} = \frac{4n^3+6n^2+3n}{8n^3+12n^2+6n+1} = \frac{4n^3+6n^2+3n+0{,}5-0{,}5}{2\left(4n^3+6n^2+3n+0{,}5\right)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3}$. Szacujemy:

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3} < \frac{1}{2}$, ponieważ $\frac{1}{2(2n+1)^3} > 0$ dla dowolnej liczby n, $n \in N_+$. Ponadto

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2\cdot 1+1)^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{54} = \frac{13}{27} = \frac{208}{432} > \frac{189}{432} = \frac{7}{16}$. Zatem $\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3} > \frac{7}{16}$ dla dowolnej liczby n, $n \in N_+$, c.k.d.

10.60. 0,704 (10.3P)

Oznaczamy zdarzenia: A – „czujnik a będzie działał poprawnie"; B – „czujnik b będzie działał poprawnie"; C – czujnik c będzie działał poprawnie". Mamy (**10.9d**) $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}6$, $P(C) = 0{,}7$. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że połączenie pomiędzy punktami M i N będzie działało poprawnie jest równe $P(A \cap (B \cup C))$, tzn. musi działać czujnik a i co najmniej jeden z czujników b lub c. Mamy $P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$, (**10.9e**). Zdarzenia A, B, C są niezależne, więc $P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}704$.

10.61. a) $\frac{11}{969}$ b) $\frac{232}{323}$ (10.1R, 10.3P)

a) Przestrzeń Ω jest zbiorem 4-elementowych podzbiorów zbioru 20-elementowego; $|\Omega| = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4!\cdot 16!} = 17\cdot 15\cdot 19$; zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Niech A oznacza zdarzenie: „wszystkie wylosowane piłeczki są w jednakowym kolorze", wówczas $|A| = \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} = 5 + 15 + 35 = 55$ (**10.7b**), więc $P(A) = \frac{55}{15\cdot 17\cdot 19} = \frac{11}{969}$ (**10.10**).

b) niech B' oznacza zdarzenie: „żadna z wylosowanych piłeczek nie jest żółta". Wówczas $|B'| = \binom{15}{4} = 13\cdot 7\cdot 15$. A zatem $P(B') = \frac{13\cdot 7}{17\cdot 19} = \frac{91}{323}$, skąd $P(B) = \frac{232}{323}$.

10.62. a) $\frac{22}{91}$ b) $\frac{44}{91}$ c) $\frac{1}{1365}$ (10.1R, 10.3P)

Niech Ω to przestrzeń zdarzeń elementarnych; na podstawie (**10.2**) oraz (**10.7**) mamy $|\Omega| = \binom{15}{4}\binom{15}{4}$; wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

a) A – zdarzenie „wśród wybranych osób nie będzie ani jednego małżeństwa", $|A| = \binom{15}{4}\binom{11}{4}$, spośród 15 kobiet wybieramy dowolnie cztery panie, a następnie spośród 11 panów, „nie-mężów", wybieramy czterech mężczyzn. Otrzymujemy $P(A) = \frac{\binom{15}{4}\binom{11}{4}}{\binom{15}{4}\binom{15}{4}} = \frac{22}{91}$ (zobacz(**10.10**) i (**10.7b**)).

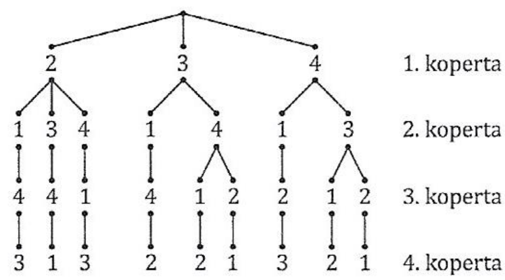
b) B – zdarzenie „wśród wybranych osób będzie tylko jedno małżeństwo", $|B| = \binom{15}{1}\binom{14}{3}\binom{11}{3}$, z 15 par wybieramy jedną, z pozostałych 14 kobiet wybieramy trzy panie, z pozostałych 11 panów, „nie-mężów", wybieramy trzech. A zatem $P(B) = \frac{\binom{15}{1}\binom{14}{3}\binom{11}{3}}{\binom{15}{4}\binom{15}{4}} = \frac{44}{91}$.

c) C – zdarzenie „wśród wybranych osób będą cztery małżeństwa"; $|C| = \binom{15}{4}$; $P(C) = \frac{\binom{15}{4}}{\binom{15}{4}\binom{15}{4}} = \frac{1}{1365}$.

10.63. $\frac{5}{8}$ (10.1R, 10.3P)

I sposób – Korzystamy z reguły dodawania (**10.1**). Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego, $|\Omega|=4!$. Oznaczamy przez A_n zdarzenie: „ dokładnie n listów trafiło do właściwych kopert", gdzie $n\in\{1,2,3,4\}$. Wówczas $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$, zdarzenia A_1, A_2, A_3, A_4 wzajemnie się wykluczają. Obliczamy: $|A_1|=\binom{4}{1}\cdot 2$ (na 4 sposoby można wybrać 1 list, który trafił do właściwej koperty, na dwa sposoby pozostałe 3 listy nie trafią do właściwych kopert; czemu odpowiadają permutacje $(3,1,2)$, $(2,3,1)$. $|A_2|=\binom{4}{2}\cdot 1$ (na $\binom{4}{2}$ sposoby można wybrać 2 listy spośród czterech, które trafią do właściwych kopert; pozostałe 2 listy nie trafią do odpowiednich kopert wtedy, gdy zostaną zamienione w kopertach miejscami – na 1 sposób). Zdarzenie A_3 jest zdarzeniem niemożliwym, $|A_3|=0$; natomiast $|A_4|=1$. Wobec tego $|A|=8+6+1=15$. Stąd $P(A)=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

II sposób – Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A' – „żaden list nie trafi do właściwej koperty". Dla ułatwienia numerujemy koperty oraz odpowiadające im listy kolejno cyframi 1, 2, 3, 4. Następnie budujemy drzewo stochastyczne (**10.11**), w którym poszczególny poziom węzłów oznacza numer listu, który trafił do danej koperty.



Ponieważ 9 zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A', więc $P(A')=\frac{9}{24}$, skąd $P(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$.

10.64. $\frac{11}{35}$ (10.1R, 10.3P)

Niech a oznacza długość boku sześciokąta foremnego. Punkty A, B, C, D, E, F wyznaczają $\binom{6}{2}$, czyli 15 odcinków, wśród których: 6 ma długość a, 6 ma długość $a\sqrt{3}$, 3 mają długość $2a$. Przestrzeń Ω jest zbiorem wszystkich 2-elementowych kombinacji zbioru 15-elementowego; $|\Omega|=\binom{15}{2}=105$, A – zdarzenie „wylosowane odcinki mają taką samą długość". Na podstawie reguły (**10.1**) otrzymujemy $|A|=\binom{6}{2}+\binom{6}{2}+\binom{3}{2}=33$. Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, więc na podstawie (**10.10**) mamy $P(A)=\frac{33}{105}=\frac{11}{35}$.

10.65. $\frac{37}{273}$ (10.1R, 10.3P)

Punkty A, B, C, D, E, F, G, H wyznaczają $\binom{8}{2}$ czyli 28 odcinków, wśród których 12 jest krawędziami sześcianu, 12 jest przekątnymi ścian sześcianu, 4 są przekątnymi sześcianu. Przestrzeń Ω jest zbiorem wszystkich 3-elementowych kombinacji zbioru 28-elementowego $|\Omega|=\binom{28}{3}=3276$; A – zdarzenie „wylosowane trzy odcinki mają taką samą długość". Na podstawie reguły (**10.1**) otrzymujemy $|A|=\binom{12}{3}+\binom{12}{3}+\binom{4}{3}=444$. Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, więc $P(A)=\frac{444}{3276}=\frac{37}{273}$.

10.66. $n=5$ (10.1R, 10.3P)

W pudełku znajduje się $n+2$ wszystkich losów; $|\Omega|=\binom{n+2}{2}$; wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Niech A oznacza zdarzenie „losując 2 losy otrzymamy co najmniej 1 los wygrywający", $P(A)\geq\frac{1}{2}$. Wówczas A' - zdarzenie: „żaden z wylosowanych losów nie jest wygrywający; $P(A')\leq\frac{1}{2}$ (**10.9d**). Ponieważ $|A'|=\binom{n}{2}$, więc na podstawie (**10.10**) otrzymujemy nierówność $\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+2}{2}}\leq\frac{1}{2}$; po zastosowaniu wzoru (**10.7b**) i uproszczeniu wyrażeń mamy:

$2(n^2-n)\leq(n+2)(n+1)$, czyli $n^2-5n-2\leq 0$; $\Delta=33$; $n_1=\frac{5-\sqrt{33}}{2}<0$; $n_2=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$. Otrzymujemy zależność $n\in\left(0,\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\cap N_+$, czyli $n\in\{1,2,3,4,5\}$; największą liczbą jest 5.

10.67. $\frac{27}{65}$ (10.2R)

Tworzymy model, w którym wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Przestrzeń Ω jest zbiorem 2-elementowych wariacji z powtórzeniami o wartościach z danego zbioru; $|\Omega|=10^2=100$. Niech A oznacza zdarzenie: „iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6".

I sposób – Wypisujemy w tabeli wszystkie iloczyny wylosowanych liczb, uwzględniając kolejność tych liczb:

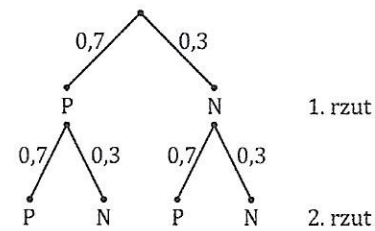
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Ograniczamy przestrzeń zdarzeń elementarnych do zdarzenia B – „iloczyn wylosowanych liczb jest większy od 15";
$|B|=3+5+2\cdot 7+2\cdot 8+3\cdot 9=65$.
Znajdujemy w zbiorze B wszystkie zdarzenia elementarne, sprzyjające zdarzeniu A, jest ich 27 (na rysunku zaznaczone szarym kolorem). Zatem $P(A\mid B)=\frac{27}{65}$.

II sposób – Korzystamy ze wzoru (**10.12**). Obliczamy $P(B)$ oraz $P(A\cap B)$. Obliczamy $|B|$. W tym celu wyznaczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B' – „iloczyn wylosowanych liczb jest nie większy, niż 15". Mamy: 10 par (a,b), jeśli $a=1$; 7 par, jeśli $a=2$; 5 par, jeśli $a=3$, 3 pary, jeśli $a=4$ albo $a=5$; 2 pary, jeśli $a=6$ albo $a=7$ oraz po jednej parze w przypadku, gdy $a=8$ albo $a=9$, albo $a=10$. Zatem $|B'|=10+7+5+2\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 1=35$, skąd $|B|=100-35=65$. Mamy $P(B)=\frac{65}{100}$. Następnie obliczamy $|A\cap B|$. Zauważamy, że mamy $2\cdot 8-1$ par liczb (a,b), w których $a=6$ lub $b=6$ oraz $a\cdot b>15$. Inne iloczyny podzielne przez 6 są utworzone przez pary, w których jedna z liczb jest podzielna przez 3 lub przez 9, a druga jest parzysta, różna od 6. Jeśli $a=3$, to $b\in\{8,10\}$; jeśli $a=9$, to $b\in\{2,4,8,10\}$ – razem 6 par. Zamieniając kolejność liczb a,b w parze otrzymujemy 6 kolejnych par. Zatem $|A\cap B|=15+6\cdot 2=27$, skąd $P(A\cap B)=\frac{27}{100}$. Ostatecznie $P(A\mid B)=\frac{27}{100}\cdot\frac{100}{65}=\frac{27}{65}$.

10.68. a) 0,58 b) $\frac{16}{21}$ (10.1R, 10.3P, 10.2R)

a) Określamy przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Niech $p=P(\{1\})=P(\{3\})=P(\{5\})=P(\{6\})$, wówczas $P(\{2\})=2p$, $P(\{4\})=4p$. Mamy $4p+2p+4p=P(\Omega)=1$, (zobacz (**10.8**)) skąd $p=0,1$. Suma wyrzuconych oczek jest parzysta, jeśli obie liczby ją tworzące są parzyste albo obie liczby są nieparzyste. Niech A oznacza zdarzenie: „suma otrzymanych oczek jest parzysta"; A_1 – zdarzenie: „w pojedynczym rzucie kostką otrzymamy ściankę z parzystą liczbą oczek", zaś A_2 – „w pojedynczym rzucie kostką otrzymamy ściankę z nieparzystą liczbą oczek". Wówczas $P(A_1)=0,2+0,4+0,1=0,7$ oraz $P(A_2)=0,3$. Szkicujemy drzewo stochastyczne, P oznacza, że wypadła parzysta liczba oczek, N – wypadła nieparzysta liczba oczek.



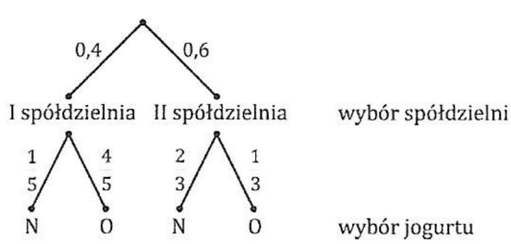
Otrzymujemy $P(A)=0,7\cdot 0,7+0,3\cdot 0,3=0,58$.

b) Niech A oznacza zdarzenie – „suma otrzymanych oczek jest pierwsza"; B – „suma otrzymanych oczek jest nieparzysta". Mamy $P(B)=0,42$ (zobacz podpunkt a). Wyznaczamy $P(A\cap B)$. Zauważamy, że nieparzystą sumę, będącą liczbą pierwszą, uzyskamy w następujących przypadkach: {1, 2}, {1, 4}, {1, 6}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 4}, {5, 6}. Obliczamy: $P(\{1,2\})=2\cdot 0,1\cdot 0,2=0,04=P(\{2,3\})=P(\{2,5\})$; analogicznie $P(\{1,4\})=2\cdot 0,1\cdot 0,4=0,08=P(\{3,4\})$ oraz $P(\{1,6\})=2\cdot 0,1\cdot 0,1=0,02=P(\{5,6\})$. Zatem $P(A\cap B)=3\cdot 0,04+2\cdot 0,08+2\cdot 0,02=0,32$. Stąd $P(A\mid B)=\frac{0,32}{0,42}=\frac{16}{21}$.

10.69. $\frac{12}{25}$ (10.3R)

<u>I sposób</u> –Niech A oznacza zdarzenie, że losowo wybrany jogurt jest naturalny, B_1 – losowo wybrany jogurt pochodzi ze spółdzielni I, B_2 – losowo wybrany jogurt pochodzi ze spółdzielni II. Mamy $B_1\cup B_2=\Omega$, $B_1\cap B_2=\varnothing$; $P(B_1)=\frac{4}{10}$, $P(B_2)=\frac{6}{10}$. Zauważamy, że $P(A\mid B_1)=\frac{1}{5}$; $P(A\mid B_2)=\frac{2}{3}$. Spełnione są założenia twierdzenia (**10.15**), więc: $P(A)=\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}=\frac{12}{25}$.

<u>II sposób</u> – Przedstawiamy etapy doświadczenia losowego na drzewie stochastycznym. Niech N oznacza wybór jogurtu naturalnego, O – wybór jogurtu owocowego.



Wówczas $P(A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{5}+\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{3}=\frac{12}{25}$.

10.70. a) $\frac{5}{21}$ b) $\frac{15}{28}$ c) $\frac{1}{2}$ (10.3R, 10.2R)

a) Oznaczamy zdarzenia: A – „wylosowane trzy kule okazały się białe"; B_1 – „usunięto na początku kulę czarną"; B_2 – „usunięto na początku kulę białą". $B_1\cup B_2=\Omega$, $B_1\cap B_2=\varnothing$, $P(B_1)=\frac{1}{3}$, $P(B_2)=\frac{2}{3}$, $P(A\mid B_1)=\frac{\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{5}{14}$,

$P(A\mid B_2)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{5}{28}$. Spełnione są założenia twierdzenia (**10.15**), więc $P(A)=\frac{5}{14}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{28}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{21}$.

b) Oznaczamy zdarzenia: C – „wylosowano dwie kule białe i jedną kulę czarną". $P(C\mid B_2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{15}{28}$

c) Obliczamy $P(B_2\mid A)$, (zobacz **10.16**): $P(B_2\mid A)=\frac{P(A\cap B_2)}{P(A)}=\frac{P(A\mid B_2)\cdot P(B_2)}{P(A)}$. Korzystamy z danych punktu a) i otrzymujemy $P(B_2\mid A)=\frac{\frac{5}{28}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{5}{21}}=\frac{1}{2}$.

10.71. Do pierwszej urny należy włożyć 3 kule białe, a do drugiej – 1 kulę białą. (10.3R)

Przyjmijmy oznaczenia zdarzeń: A – „wylosowano kulę białą", B_1 – „wylosowano kulę z pierwszej urny", B_2 – „wy-losowano kulę z drugiej urny". Niech n oznacza liczbę kul białych w pierwszej urnie, $4-n$ – liczbę kul białych w drugiej urnie, $n\in\{0,1,2,3,4\}$. Mamy $B_1\cap B_2=\varnothing$, $B_1\cup B_2=\Omega$, ponadto $P(B_1)=\frac{2}{3}$, $P(B_2)=\frac{1}{3}$, zatem są spełnione założenia twierdzenia (**10.15**). $P(A\mid B_1)=\frac{n}{n+5}$, $P(A\mid B_2)=\frac{4-n}{5-n}$ i $P(A)=\frac{n}{n+5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4-n}{5-n}\cdot\frac{1}{3}$. Następnie sprawdzamy, dla jakiej wartości n, $n\in\{0,1,2,3,4\}$, wyrażenie $P(A)$ przyjmuje największą wartość. Otrzymujemy $n=3$; wówczas $P(A)=\frac{5}{12}$.

10.72. a) $\frac{281}{4750}$ b) $\frac{40}{281}$ (10.1R, 10.3R, 10.2R)

Oznaczamy zdarzenia: A – „uczestnik loterii wyciągnął 2 losy wygrywające"; B_1 – „uczestnik loterii losował z pierwszego koszyka"; B_2 – „uczestnik loterii losował z drugiego koszyka"; B_3 – „uczestnik loterii losował z trzeciego koszyka".

a) Mamy: $B_1\cup B_2\cup B_3=\Omega$, zdarzenia B_1, B_2, B_3 są parami rozłączne, ponadto $P(B_1)=0{,}2$, $P(B_2)=0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}16$, $P(B_3)=0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}64$. Spełnione są założenia twierdzenia (**10.15**), $P(A\mid B_1)=\frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{9}{38}$, $P(A\mid B_2)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{1}{19}$,

$P(A\mid B_3)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{1}{190}$; $P(A)=\frac{9}{38}\cdot 0{,}2+\frac{1}{19}\cdot 0{,}16+\frac{1}{190}\cdot 0{,}64=\frac{281}{4750}(\approx 0{,}059)$.

b) Szukamy prawdopodobieństwa $P(B_2\mid A)$. Mamy (**10.16**): $P(B_2\mid A)=\frac{P(B_2\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A\mid B_2)\cdot P(B_2)}{P(A)}=\frac{40}{281}(\approx 0{,}14)$.

10.73. $\frac{1023}{10240}$ (10.2R, 10.3R)

Oznaczamy zdarzenia: A – „w wyniku rzutów monetą otrzymamy same orły"; B_k – „rzucamy k razy monetą", gdzie $k\in\{1,2,3,...,10\}$. $P(B_1)=P(B_2)=...=P(B_{10})=\frac{1}{10}$. Zdarzenia B_1, B_2, ..., B_{10} są parami rozłączne, $B_1\cup B_2\cup...\cup B_{10}=\Omega$. Spełnione są założenia twierdzenia (**10.15**). Ponadto $P(A\mid B_k)=\frac{1}{2^k}$, $k\in\{1,2,3,...,10\}$. Mamy zatem

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{10}+...+\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{10}}\right)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1023}{10240}.$$

W obliczeniach zastosowaliśmy wzór (**4.8b**).

10.74. (10.2R, 10.3R)

Oznaczamy zdarzenia: A – „wyciągnięto kulę białą"; B_k – „wylosowano urnę o numerze k", $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

$P(B_1) = P(B_2) = ... = P(B_n) = \frac{1}{n}$. Zdarzenia B_1, B_2, ..., B_n są parami rozłączne i $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$. Spełnione są założenia twierdzenia **10.15**. Ponadto $P(A \mid B_k) = \frac{k}{n}$, $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Mamy zatem

$P(A) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} + ... + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + ... + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$, bo $\frac{1}{2n} > 0$ dla dowolnej liczby naturalnej n, $n > 0$, c.k.d.

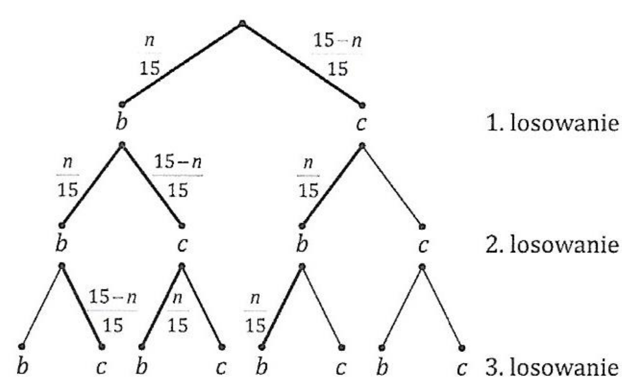
10.75. $\frac{4}{9}$, $n = 10$ (10.1R, 10.3P, 11.6R)

<u>I sposób</u> – Oznaczamy: Ω – „zbiór wszystkich 3-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru 15-elementowego"; $|\Omega| = 15^3$; wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. A – „zbiór 3-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru 15-elementowego, w których dokładnie dwa wyrazy oznaczają wylosowanie kuli białej"; $|A| = 3n^2(15 - n)$. Korzystamy z twierdzenia (**10.10**) i otrzymujemy $P(A) = \frac{3n^2(15-n)}{15^3}$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, ..., 15\}$. Aby wyznaczyć największą wartość $P(A)$ możemy postąpić na dwa sposoby:

1) Obliczamy $P(A)$ dla kolejnych wartości n od 1 do 15 i otrzymujemy, że $P(A)$ jest największe, jeśli $n = 10$ i $P(A) = \frac{4}{9}$.

2) Wyznaczamy największą wartość funkcji $f(x) = \frac{3x^2(15-x)}{15^3}$, gdzie $x \in \langle 1, 15 \rangle$. Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 1, 15 \rangle$ i różniczkowalna w przedziale $(1, 15)$. Na podstawie (**5.17**) i (**5.18**) obliczamy $f'(x) = \frac{3}{15^3}(30x - 3x^2)$, gdzie $x \in (1, 15)$. Stąd $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 10)$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (10, 15)$. Zatem w punkcie 10 funkcja f ma maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą wartością tej funkcji $f_{max}(10) = \frac{4}{9}$. Stwierdzamy, że $P(A)$ będzie największe wtedy, gdy $n = 10$ i wówczas $P(A) = \frac{4}{9}$.

<u>II sposób</u>: Doświadczenie losowe przedstawiamy na drzewie (zobacz (**10.11**)); b oznacza wylosowanie kuli białej, c – wylosowanie kuli, która nie jest biała.



A – zdarzenie „biała kula będzie wylosowana dokładnie dwa razy". $A = \{(b, b, c), (b, c, b), (c, b, b)\}$;

$P((b, b, c)) = P((b, c, b)) = P((c, b, b)) = \frac{n^2(15-n)}{15^3}$; $P(A) = 3 \cdot \frac{n^2(15-n)}{15^3}$. Dalej postępujemy tak, jak w I sposobie.