Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

10.47. Ile jest różnych funkcji odwzorowujących zbiór $X=\{1,2,3,4\}$ w zbiór $Y=\{1,2,3,4,5,6,7\}$:
a) dowolnych
b) różnowartościowych
c) rosnących
d) ściśle monotonicznych (rosnących lub stałych, lub malejących)?

10.48. Oblicz, ile dzielników naturalnych ma liczba a, jeśli $a=7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$.

10.49. Ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 36?

10.50. Tworzymy różne napisy sześcioliterowe z różnych liter 24-literowego alfabetu. Ile wśród nich jest takich napisów, w których litery należą do grupy składającej się z ośmiu liter stojących obok siebie w alfabecie?

10.51. Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których suma cyfr jest równa 6 oraz w zapisie tych liczb występują tylko zera, jedynki i dwójki?

10.52. Z talii 52 kart (4 kolory, po 13 kart w każdym kolorze) losujemy 7 kart. Ile jest takich wyników losowania, wśród których są karty wszystkich czterech kolorów?

10.53. Doświadczenie losowe polega na rzucie trzema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Interesuje nas suma wyrzuconych oczek. Liczbę oczek równą 11 można uzyskać na sześć sposobów: $11=1+4+6=1+5+5=2+4+5=4+4+3=2+6+3=3+3+5$. Liczbę oczek równą 12 również można uzyskać na sześć sposobów: $12=6+5+1=2+6+4=2+5+5=3+4+5=4+4+4=3+3+6$. Czy to znaczy, że prawdopodobieństwo uzyskania 11 oczek w rzucie trzema kostkami jest tak samo prawdopodobne jak uzyskania 12 oczek? Odpowiedź uzasadnij.

10.54. Rzucamy 5 razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że reszka wypadnie co najwyżej 3 razy.

10.55. Cyfry 1, 2, 3, 4, ..., 9 ustawiamy losowo w jednym rzędzie. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że utworzona w ten sposób dziewięciocyfrowa liczba jest podzielna przez 4.

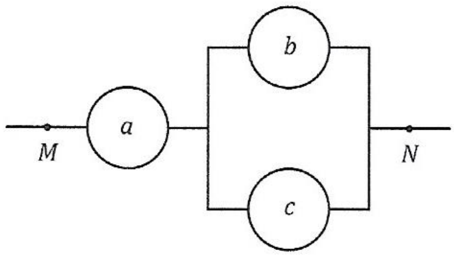
10.56. Rzucamy trzy razy ośmiościenną symetryczną kostką, która na ściankach ma kolejno liczby 1, 2, 3, ..., 8. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – „suma kwadratów otrzymanych liczb jest podzielna przez 4".

■ **10.57.** Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,...,3n-1,3n\}$, gdzie n jest naturalną liczbą nieparzystą, losujemy jedną liczbę. Wykaż, że prawdopodobieństwo zdarzenia: wylosowana liczba jest parzysta i jednocześnie nie jest podzielna przez 3, jest równe $\frac{1}{3}$.

10.58. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, ..., n, n+1, ..., 2n, 2n+1\}$, gdzie $n\geq 2$, losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Prawdopodobieństwo wylosowania za pierwszym razem liczby dwa razy większej niż za drugim razem jest równe $\frac{1}{30}$. Oblicz sumę $1+2+3+...+2n+(2n+1)$.

■ **10.59.** W zbiorze X mamy n liczb parzystych i $n+1$ liczb nieparzystych, $n \in N_+$. Ze zbioru X losujemy kolejno trzy razy ze zwracaniem jedną liczbę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma wylosowanych liczb jest parzysta. Wykaż, że $\frac{7}{16} < p < \frac{1}{2}$.

10.60. Połączenie elektryczne między punktami M i N zbudowane jest według schematu przedstawionego poniżej



Elementy a, b, c to czujniki działające niezależnie, a prawdopodobieństwo ich usterek jest odpowiednio równe 0,2, 0,4, 0,3. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że połączenie pomiędzy punktami M i N będzie działało prawidłowo.

10.61. W pudełku znajdują się piłeczki: 2 w kolorze zielonym, 5 w kolorze żółtym, 6 w kolorze czerwonym i 7 w kolorze niebieskim. Zosia wyjmuje losowo 4 piłeczki. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
a) A – „wszystkie wylosowane piłeczki są w jednym kolorze"
b) B – „co najmniej jedna z wylosowanych piłeczek jest żółta".

10.62. Na spotkanie przyszło 15 par małżeńskich. Z tej grupy wylosowano 4 kobiety i czterech mężczyzn. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród wybranych osób:
a) nie będzie ani jednego małżeństwa
b) będzie tylko jedno małżeństwo
c) będą cztery małżeństwa.

10.63. Sekretarka napisała 4 różne listy do czterech osób i odpowiednio zaadresowała 4 koperty. Niestety, z powodu pośpiechu, włożyła listy do kopert na chybił trafił. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – „co najmniej jeden list trafił do właściwej koperty".

10.64. Punkty A, B, C, D, E, F są wierzchołkami sześciokąta foremnego. Rozpatrujemy zbiór wszystkich odcinków wyznaczonych przez te punkty. Z tego zbioru losujemy dwa odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowane odcinki mają taką samą długość?

10.65. Punkty A, B, C, D, E, F, G, H są wierzchołkami sześcianu. Rozpatrujemy zbiór wszystkich odcinków wyznaczonych przez te punkty. Z tego zbioru losujemy trzy odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że te trzy odcinki mają taką samą długość?

10.66. W pudełku znajdują się 2 losy wygrywające i n losów pustych, $n \in N_+$. Wyznacz największą liczbę n, dla której prawdopodobieństwo zdarzenia A – „losując 2 losy otrzymamy co najmniej 1 los wygrywający", jest nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$.

10.67. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6, jeśli wiadomo, że jest on większy od 15.

10.68. Mamy niesymetryczną, sześcienną kostkę z liczbami oczek 1, 2, 3, 4, 5, 6 na poszczególnych ściankach. Wiadomo, że ścianka z czterema oczkami wypada cztery razy częściej niż ścianka z jednym oczkiem i dwa razy częściej niż ścianka z dwoma oczkami. Ścianki: z jednym oczkiem, z trzema oczkami oraz z pięcioma i sześcioma oczkami – wypadają z jednakowym prawdopodobieństwem. Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
a) suma otrzymanych oczek jest parzysta
b) suma otrzymanych oczek jest pierwsza, jeżeli wiadomo, że jest nieparzysta.

10.69. Do sklepu spożywczego dostarcza się z dwóch spółdzielni mleczarskich dwa rodzaje jogurtów: jogurty naturalne i jogurty owocowe. Codziennie sklep otrzymuje dostawę: 40% jogurtów ze spółdzielni I i 60% jogurtów ze spółdzielni II. Spółdzielnia I przywozi 4 razy mniej jogurtów naturalnych niż owocowych, a spółdzielnia II – 2 razy więcej jogurtów naturalnych niż owocowych. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybrany losowo jogurt z dziennej dostawy jest naturalny.

10.70. Z urny zawierającej 6 kul białych i 3 kule czarne usunięto losowo jedną kulę. Następnie z urny wylosowano trzy kule.
a) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul białych.
b) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych i jednej czarnej, jeśli usunięta na początku kula była biała.
c) Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że usunięta na początku kula była czarna, jeśli wiadomo, że trzy wybrane kule okazały się białe?

10.71. W pierwszej urnie jest 5 kul czarnych, a w drugiej jest 1 kula czarna. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jeżeli wypadną co najmniej trzy oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym wypadku – z drugiej. Jak należy rozłożyć w tych urnach 4 kule białe, aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było największe?

10.72. W wesołym miasteczku zorganizowano loterię fantową. W każdym z trzech koszy jest po 20 losów. W pierwszym koszu jest 10 losów wygrywających, w drugim – 5 losów wygrywających, a w trzecim – 2 losy wygrywające. Uczestnik loterii, zanim wyciągnie losy z kosza, strzela z wiatrówki do tarczy. Jeśli trafi w cel za pierwszym razem – wyciąga 2 losy z pierwszego koszyka, jeśli trafi w cel za drugim razem – wyciąga 2 losy z drugiego koszyka, jeśli nie trafi w cel ani za pierwszym, ani za drugim razem – wyciąga 2 losy z trzeciego koszyka. Prawdopodobieństwo trafienia w cel z wiatrówki w pojedynczym strzale jest równe 0,2.
a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że uczestnik loterii wyciągnie 2 losy wygrywające.
b) Uczestnik loterii wyciągnął 2 losy wygrywające. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosował je z drugiego koszyka.

10.73. Wybieramy losowo liczbę naturalną k z przedziału $\langle 1, 10 \rangle$, a następnie rzucamy k razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy same orły.

■ **10.74.** Mamy n ponumerowanych urn. W każdej urnie jest n kul, przy czym w urnie o numerze k jest k kul białych, pozostałe kule są czarne. Wybieramy losowo jedną urnę i z niej losujemy jedną kulę. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej jest większe od $\frac{1}{2}$.

10.75. W urnie jest 15 kul, w tym n kul białych. Losujemy trzy razy po jednej kuli, zwracając za każdym razem kulę do urny. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że biała kula będzie wylosowana dokładnie dwa razy. Dla jakiej wartości n prawdopodobieństwo to będzie największe?