Równania kwadratowe z wartością bezwzględną

Na prezentacji omówimy jedno równanie.

Na prezentacji omówimy jedno równanie. Jest ono trudniejsze od tych, które robiliśmy na lekcji (i tych, które będą na kartkówce), ale pozwoli nam lepiej zrozumieć te prostsze przykłądy.

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Wyrażenie $x^2 - 4x - 5$ możemy zapisać jako $(x + 1)(x - 5)$, czyli jest ono dodatnie dla $x < -1$ oraz dla $x > 5$, a ujemne dla $-1 < x < 5$.

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Wyrażenie $x^2 - 4x - 5$ możemy zapisać jako $(x+1)(x-5)$, czyli jest ono dodatnie dla $x < -1$ oraz dla $x > 5$, a ujemne dla $-1 < x < 5$.

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Wyrażenie $x^2 - 4x - 5$ możemy zapisać jako $(x + 1)(x - 5)$, czyli jest ono dodatnie dla $x < -1$ oraz dla $x > 5$, a ujemne dla $-1 < x < 5$.

Wyrażenie $x - 2$ jest oczywiście dodatnie dla $x > 2$, a ujemne dla $x < 2$.

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Wyrażenie $x^2 - 4x - 5$ możemy zapisać jako $(x+1)(x-5)$, czyli jest ono dodatnie dla $x < -1$ oraz dla $x > 5$, a ujemne dla $-1 < x < 5$.

Wyrażenie $x - 2$ jest oczywiście dodatnie dla $x > 2$, a ujemne dla $x < 2$.

Musimy więc przeanalizować następujące przedziały:

$$x < -1 \qquad -1 \leqslant x < 2 \qquad 2 \leqslant x < 5 \qquad 5 \leqslant x$$

$x < -1$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

$x < -1$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $x < -1$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne. Opuszczamy wartość bezwzględną. W drugim wyrażeniu musimy zmienić znak (dostawiając minus). Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

$x < -1$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $x < -1$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne. Opuszczamy wartość bezwzględną. W drugim wyrażeniu musimy zmienić znak (dostawiając minus). Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 5x - 12 = 0$$

$x < -1$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $x < -1$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne. Opuszczamy wartość bezwzględną. W drugim wyrażeniu musimy zmienić znak (dostawiając minus). Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 5x - 12 = 0$$

Rozwiązujemy korzystając ze wzoru. Mamy dwa rozwiązania $x_1 = \frac{5-\sqrt{73}}{2}$ oraz $x_2 = \frac{5+\sqrt{73}}{2}$.

$x < -1$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $x < -1$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne. Opuszczamy wartość bezwzględną. W drugim wyrażeniu musimy zmienić znak (dostawiając minus). Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 5x - 12 = 0$$

Rozwiązujemy korzystając ze wzoru. Mamy dwa rozwiązania $x_1 = \frac{5-\sqrt{73}}{2}$ oraz $x_2 = \frac{5+\sqrt{73}}{2}$. Tylko pierwsze z tych rozwiązań spełnia założenie $x < -1$

$-1 \leqslant x < 2$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

$-1 \leqslant x < 2$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $-1 \leqslant x < 2$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne i drugie jest ujemne. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

$-1 \leqslant x < 2$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $-1 \leqslant x < 2$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne i drugie jest ujemne. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

$-1 \leqslant x < 2$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $-1 \leqslant x < 2$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne i drugie jest ujemne. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

Mnożymy przez -1 i rozkładamy na $(x-1)(x-2) = 0$. Mamy dwa rozwiązania $x_3 = 1$ oraz $x_4 = 2$.

$-1 \leqslant x < 2$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $-1 \leqslant x < 2$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne i drugie jest ujemne. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

Mnożymy przez -1 i rozkładamy na $(x-1)(x-2) = 0$. Mamy dwa rozwiązania $x_3 = 1$ oraz $x_4 = 2$. Znów tylko pierwsze z tych rozwiązań spełnia założenie $-1 \leqslant x < 2$.

Jak to?!

Teraz ci bardziej dociekliwi powinni krzyknąć:

"Jak to?! Gdybyśmy w przedziale uwzględnili 2, to mielibyśmy o jedno rozwiązanie więcej, a przecież na lekcji mówiliśmy, że nie ma znaczenia, czy ją uwzględniamy, czy nie."

Jak to?!

Teraz ci bardziej dociekliwi powinni krzyknąć:

"Jak to?! Gdybyśmy w przedziale uwzględnili 2, to mielibyśmy o jedno rozwiązanie więcej, a przecież na lekcji mówiliśmy, że nie ma znaczenia, czy ją uwzględniamy, czy nie."

Odpowiedź brzmi: "cierpliwości!"

$2 \leqslant x < 5$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

$2 \leqslant x < 5$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $2 \leqslant x < 5$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

$2 \leqslant x < 5$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $2 \leqslant x < 5$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

$2 \leqslant x < 5$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $2 \leqslant x < 5$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

Znów przemnożymy przez -1 i rozłożym $(x-2)(x-3) = 0$. Mamy dwa rozwiązania $x_5 = 2$ oraz $x_6 = 3$.

$2 \leqslant x < 5$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $2 \leqslant x < 5$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

Znów przemnożymy przez -1 i rozłożym $(x - 2)(x - 3) = 0$. Mamy dwa rozwiązania $x_5 = 2$ oraz $x_6 = 3$. Oba rozwiązania spełniają założenie $2 \leqslant x < 5$.

$2 \leqslant x < 5$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $2 \leqslant x < 5$, to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

Znów przemnożymy przez -1 i rozłożym $(x-2)(x-3) = 0$. Mamy dwa rozwiązania $x_5 = 2$ oraz $x_6 = 3$. Oba rozwiązania spełniają założenie $2 \leqslant x < 5$.

Całe szczęście 2 jednak nie uciekła, pojawiła się jako rozwiązanie w trzecim przypadku!

$x \geqslant 5$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

$x \geqslant 5$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $5 \leqslant x$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie i drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$

$x \geqslant 5$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $5 \leqslant x$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie i drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 3x - 16 = 0$$

$x \geqslant 5$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $5 \leqslant x$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie i drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 3x - 16 = 0$$

Korzystając ze wzoru otrzymujemy dwa rozwiązania $x_7 = \frac{3-\sqrt{73}}{2}$ oraz $x_8 = \frac{3+\sqrt{73}}{2}$.

$x \geqslant 5$

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Jeśli $5 \leqslant x$, to pierwsze wyrażenie jest dodatnie i drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 3x - 16 = 0$$

Korzystając ze wzoru otrzymujemy dwa rozwiązania $x_7 = \frac{3-\sqrt{73}}{2}$ oraz $x_8 = \frac{3+\sqrt{73}}{2}$. Tylko drugie z tych rozwiązań spełnia założenie $5 \leqslant x$.

Odpowiedź

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Odpowiedź

Rozwiąż równanie $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$.

Ostatecznie otrzymujemy pięć rozwiązań:

$$x \in \left\{ \frac{5 - \sqrt{73}}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ \frac{3 + \sqrt{73}}{2} \right\}$$

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.