Zestaw C – odpowiedzi

1. 355 ($m = 237$, $n = -118$)
2. 200
3. 267 $\left(\frac{a}{b} = \frac{15}{56}\right)$
4. 210
5. 828 $\left(r = 2\sqrt{2} - 2\right)$
6. 153 ($n = -153$)
7. 585 ($a = 585$)

Zestaw D – odpowiedzi

1. $a^b > b^a$
3. $c < a < b < d$
10. $x \in (-2; 3)$
11. $x \in \langle -3; 1 \rangle$
12. **a)** $x = -1$, $x = 1$
 b) $m \in \langle -4; 0) \cup (0; 4 \rangle$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zapisanie a w postaci: $a = 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + 2 + \sqrt{3}$
	Wyznaczenie liczby a: $a = 6$
	Wyznaczenie liczby b: $b = 9$
	Zapisanie wniosku wraz z uzasadnieniem: $a^b > b^a$
2.	Zapisanie równania: $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ oraz podniesienie obu stron równania do potęgi trzeciej: $a^3 = 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$
	Zapisanie równania w postaci: $a^3 = 4 - 3a$
	Zapisanie równania w postaci: $(a-1)\left(a^2 + a + 4\right) = 0$
	Rozwiązanie równania: $a = 1$
3.	Obliczenie a: $a = -\frac{1}{3}$
	Obliczenie b: $b = \frac{1}{3}$
	Obliczenie c: $c = -\frac{1}{2}$
	Obliczenie d: $d = \frac{1}{2}$
	Porównanie liczb: $c < a < b < d$
4.	Zapisanie nierówności w postaci: $x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 2x + 1 + 1 > 0$
	Przekształcenie nierówności: $(x^2-1)^2 + (x-1)^2 + 1 > 0$
	Sformułowanie wniosku: Nierówności $\left(x^2-1\right)^2 \geqslant 0$, $(x-1)^2 \geqslant 0$ i $1 > 0$ zachodzą dla każdej liczby rzeczywistej, więc dana nierówność jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
5.	Rozłożenie wyrażenia na czynniki liniowe: $k^2(k+1)(k+2)(k+1)(k+2)$
	Zauważenie, że czynniki są kwadratem iloczynu trzech kolejnych liczb naturalnych: $(k(k+1)(k+2))^2$
	Zauważenie, że wśród dwóch dowolnych kolejnych liczb naturalnych znajduje się liczba podzielna przez 2, a wśród trzech – liczba podzielna przez 3, co oznacza, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6
	Zapisanie wniosku: Kwadrat iloczynu trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6, stąd: liczba $(k^3+k^2)(k^2+3k+2)(k+2)$ jest podzielna przez 36.
6.	Zauważenie, że iloczyn jest podzielny przez 5, jeżeli co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 5, oraz że każdą liczbę $k \in \mathbf{C}$ można zapisać w jednej z postaci: $5n,\ 5n+1,\ 5n+2,\ 5n+3,\ 5n+4$ dla pewnego $n \in \mathbf{C}$
	Jeśli $k=5n$, to pierwszy czynnik jest podzielny przez 5. Jeśli $k=5n+1$, to czynnik $k+9=5n+10=5(n+2)$ jest podzielny przez 5. Jeśli $k=5n+2$, to czynnik $k^2+1=25n^2+20n+4+1=5(5n^2+4n+1)$ jest podzielny przez 5.
	Jeśli $k=5n+3$, to czynnik $k^2+1=25n^2+30n+9+1=5(5n^2+6n+2)$ jest podzielny przez 5. Jeśli $k=5n+4$, to czynnik $k+1=5n+5=5(n+1)$ jest podzielny przez 5. Zatem liczba $k(k+1)(k+9)(k^2+1)$ jest podzielna przez 5.
7.	Zauważenie, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi warunek: $(3x^2-1)^2 \geqslant 0$
	Zapisanie nierówności w postaci: $9x^4+1 \geqslant 6x^2$
	Zapisanie nierówności w postaci: $\frac{9x^4+1}{x^2} \geqslant 6$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
8.	Zauważenie, że dla $b=1-a$ nierówność przyjmuje postać $a(1-a) \leqslant \frac{1}{4}$, czyli $a^2-a+\frac{1}{4} \geqslant 0$
	Przekształcenie nierówności do postaci $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$ i zauważenie, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby dodatniej a
9.	Przekształcenie nierówności do postaci: $2(a-b) < ab(a-b)(a+b)$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $2 < ab(a+b)$
	Zauważenie, że przy podanych założeniach $ab>1$ oraz $a+b>2$, czyli $ab(a+b)>1\cdot 2=2$
10.	Zapisanie nierówności w postaci $\lvert x-2\rvert + \lvert x+1\rvert < 5$ oraz zauważenie, że należy rozpatrzyć trzy przypadki: 1. $x \in (-\infty;-1)$, 2. $x \in \langle -1;2)$, 3. $x \in \langle 2;\infty)$
	Zauważenie, że jeżeli $x \in (-\infty;-1)$, to $x \in (-2;-1)$
	Zauważenie, że jeżeli $x \in \langle -1;2)$, to $x \in \langle -1;2)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
10. cd.	Zauważenie, że jeżeli $x \in \langle 2; \infty)$, to $x \in \langle 2; 3)$
	Podanie odpowiedzi: $x \in (-2; 3)$
11.	Zauważenie, że jeżeli $x \in (-\infty; -2)$, to $x \in \langle -3; -2)$
	Zauważenie, że jeżeli $x \in \langle -2; 1)$, to $x \in \langle -2; 1)$
	Zauważenie, że jeżeli $x \in \langle 1; \infty)$, to $x = 1$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \langle -3; 1\rangle$
12. a)	Rozwiązanie równania: $x = -1$ lub $x = 1$
12. b)	Zapisanie równania w postaci: $\lvert x\rvert = \frac{4-\lvert m\rvert}{\lvert m\rvert}$ oraz zauważenie, że $m \neq 0$ i $\frac{4-\lvert m\rvert}{\lvert m\rvert} \geqslant 0$
	Zauważenie, że jeżeli $m < 0$, to $m \in \langle -4; 0)$
	Zauważenie, że jeżeli $m > 0$, to $m \in (0; 4\rangle$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \langle -4; 0) \cup (0; 4\rangle$