

Równania wykładnicze

Musimy umieć rozwiązać proste równania wykładnicze.

Równania wykładnicze to równania postaci:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

gdzie $a, b > 0$, a f, g to funkcje rzeczywiste. W naszych przykładach w wykładnikach będą występowały funkcje liniowe, kwadratowe (rzadziej wielomiany wyższego stopnia) i wartość bezwzględna.

Ogólna strategia

Ogólna strategia

- **krok 1** Obie strony równania zapisujemy jako potęga tej samej liczby.

Ogólna strategia

- **krok 1** Obie strony równania zapisujemy jako potęga tej samej liczby.
- **krok 2** Przyrównujemy wykładniki i rozwiązujemy.

Ogólna strategia

- **krok 1** Obie strony równania zapisujemy jako potęga tej samej liczby.
- **krok 2** Przyrównujemy wykładniki i rozwiązujemy.

Przykład. Rozwiąż $3^{2x-1} = 243$

Ogólna strategia

- **krok 1** Obie strony równania zapisujemy jako potęgę tej samej liczby.
- **krok 2** Przyrównujemy wykładniki i rozwiązujemy.

Przykład. Rozwiąż $3^{2x-1} = 243$

$$3^{2x-1} = 243$$

$$3^{2x-1} = 3^5$$

Ogólna strategia

- **krok 1** Obie strony równania zapisujemy jako potęgę tej samej liczby.
- **krok 2** Przyrównujemy wykładniki i rozwiązujemy.

Przykład. Rozwiąż $3^{2x-1} = 243$

$$3^{2x-1} = 243$$

$$3^{2x-1} = 3^5$$

Teraz przyrównujemy wykładniki:

$$2x - 1 = 5$$

$$x = 3$$

Przykład 1

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 4^{x+2}$$

Przykład 1

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 4^{x+2}$$

Zapisujemy jako potęgi 2:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} &= 4^{x+2} \\ 2^{-x-1} &= 2^{2x+4}\end{aligned}$$

Przykład 1

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 4^{x+2}$$

Zapisujemy jako potęgi 2:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} &= 4^{x+2} \\ 2^{-x-1} &= 2^{2x+4}\end{aligned}$$

Przyrównujemy wykładniki:

$$\begin{aligned}-x - 1 &= 2x + 4 \\ x &= -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

Przykład 2

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} = (\sqrt{3})^{x+6}$$

Przykład 2

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} = (\sqrt{3})^{x+6}$$

Zapisujemy jako potęgi 3:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} &= (\sqrt{3})^{x+6} \\ 3^{-2x+4} &= 3^{\frac{x}{2}+3}\end{aligned}$$

Przykład 2

Rozwiąż

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} = (\sqrt{3})^{x+6}$$

Zapisujemy jako potęgi 3:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} &= (\sqrt{3})^{x+6} \\ 3^{-2x+4} &= 3^{\frac{x}{2}+3}\end{aligned}$$

Przyrównujemy wykładniki:

$$\begin{aligned}-2x + 4 &= \frac{x}{2} + 3 \\ x &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Przykład 3

Rozwiąż

$$4 \times 8^x = (2\sqrt{2})^{-x}$$

Przykład 3

Rozwiąż

$$4 \times 8^x = (2\sqrt{2})^{-x}$$

Rozwiązanie:

Przykład 3

Rozwiąż

$$4 \times 8^x = (2\sqrt{2})^{-x}$$

Rozwiązanie:

$$4 \times 8^x = (2\sqrt{2})^{-x}$$

$$2^2 \times 2^{3x} = 2^{-\frac{3}{2}x}$$

$$2^{3x+2} = 2^{-\frac{3}{2}x}$$

$$3x + 2 = -\frac{3}{2}x$$

$$x = -\frac{4}{9}$$

Przykład 4

Rozwiąż

$$3 \times 81^{x-1} = (\sqrt[3]{3})^{-2x}$$

Przykład 4

Rozwiąż

$$3 \times 81^{x-1} = (\sqrt[3]{3})^{-2x}$$

Rozwiązanie (spróbujcie najpierw sami rozwiązać):

Przykład 4

Rozwiąż

$$3 \times 81^{x-1} = (\sqrt[3]{3})^{-2x}$$

Rozwiązanie (spróbujcie najpierw sami rozwiązać):

$$3 \times 81^{x-1} = (\sqrt[3]{3})^{-2x}$$

$$3 \times 3^{4x-4} = 3^{-\frac{2x}{3}}$$

$$3^{4x-3} = 3^{-\frac{2x}{3}}$$

$$4x - 3 = -\frac{2x}{3}$$

$$x = \frac{9}{14}$$

Przykład 5

Rozwiąż

$$4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^x = \frac{1}{2} \times 16^{x-1}$$

Przykład 5

Rozwiąż

$$4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^x = \frac{1}{2} \times 16^{x-1}$$

Rozwiązanie:

Przykład 5

Rozwiąż

$$4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x = \frac{1}{2} \times 16^{x-1}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x &= \frac{1}{2} \times 16^{x-1} \\2^2 \times 2^{-\frac{x}{2}} &= 2^{-1} \times 2^{4x-4} \\2^{2-\frac{x}{2}} &= 2^{4x-5} \\2 - \frac{x}{2} &= 4x - 5 \\x &= \frac{14}{9}\end{aligned}$$

Przykład 6

Rozwiąż

$$2^{|x+3|} = 1024$$

Przykład 6

Rozwiąż

$$2^{|x+3|} = 1024$$

Rozwiązanie:

Przykład 6

Rozwiąż

$$2^{|x+3|} = 1024$$

Rozwiązanie:

$$2^{|x+3|} = 1024$$

$$2^{|x+3|} = 2^{10}$$

$$|x + 3| = 10$$

$$x + 3 = -10 \quad \vee \quad x + 3 = 10$$

$$x = -13 \quad \vee \quad x = 7$$

Przykład 7

Rozwiąż

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

Przykład 7

Rozwiąż

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

Rozwiązanie:

Przykład 7

Rozwiąż

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

Rozwiązanie:

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

$$3^{|x-2|} = 3^{2x}$$

$$|x - 2| = 2x$$

Musimy rozwiązać $|x - 2| = 2x$.

Przykład 7

Rozwiąż

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

Rozwiązanie:

$$3^{|x-2|} = 9^x$$

$$3^{|x-2|} = 3^{2x}$$

$$|x - 2| = 2x$$

Musimy rozwiązać $|x - 2| = 2x$. Najlepiej narysować obie funkcje i zauważyć, że rozwiązanie jest tylko dla $-x + 2 = 2x$, co daje $x = \frac{2}{3}$.

Przykład 8

Rozwiąż

$$(\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} = 4^{x+1}$$

Przykład 8

Rozwiąż

$$(\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} = 4^{x+1}$$

Rozwiązanie:

Przykład 8

Rozwiąż

$$(\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} = 4^{x+1}$$

Rozwiązanie:

$$(\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} = 4^{x+1}$$

$$2^{x^2-1} = 2^{2x+2}$$

$$x^2 - 1 = 2x + 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

Przykład 8

Rozwiąż

$$(\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} = 4^{x+1}$$

Rozwiązanie:

$$(\sqrt[3]{2})^{3x^2-3} = 4^{x+1}$$

$$2^{x^2-1} = 2^{2x+2}$$

$$x^2 - 1 = 2x + 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

Otrzymujemy $x = 3$ lub $x = -1$.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.