

Funkcje homograficzne

Zajmiemy się rysowaniem funkcji homograficznych.

Zajmiemy się rysowaniem funkcji homograficznych.

Przypomnienie:

Definicja

Funkcja homograficzna to funkcja postaci $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $c \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$.

Zajmiemy się rysowaniem funkcji homograficznych.

Przypomnienie:

Definicja

Funkcja homograficzna to funkcja postaci $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $c \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$.

Ta definicja nie jest szczególnie istotna. Warunek $ad - bc \neq 0$ jest po to, by nie dało się wszystkiego skrócić. Przykładowo funkcja $f(x) = \frac{2x-4}{x-2}$ nie jest funkcją homograficzną, bo wszystko się skraca i otrzymujemy $f(x) = 2$.

Zajmiemy się rysowaniem funkcji homograficznych.

Przypomnienie:

Definicja

Funkcja homograficzna to funkcja postaci $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $c \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$.

Ta definicja nie jest szczególnie istotna. Warunek $ad - bc \neq 0$ jest po to, by nie dało się wszystkiego skrócić. Przykładowo funkcja $f(x) = \frac{2x-4}{x-2}$ nie jest funkcją homograficzną, bo wszystko się skraca i otrzymujemy $f(x) = 2$.

Sama nazwa też nie jest istotna. Stosuję się ją tylko w polskim programie.

Wykresy

Wiemy, że wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

Wykresy

Wiemy, że wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią OY ,

Wykresy

Wiemy, że wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią OY , podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,

Wykresy

Wiemy, że wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią OY , podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią OX ,

Wykresy

Wiemy, że wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią OY , podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią OX , podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,

Wykresy

Wiemy, że wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią OY , podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią OX , podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymptota,

Wykresy

Wiemy, że wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią OY , podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią OX , podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymptota, wzór $x = -\frac{d}{c}$,

Wykresy

Wiemy, że wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią OY , podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią OX , podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymptota, wzór $x = -\frac{d}{c}$,
- pozioma asymptota,

Wykresy

Wiemy, że wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią OY , podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią OX , podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymptota, wzór $x = -\frac{d}{c}$,
- pozioma asymptota, wzór $y = \frac{a}{c}$.

Wykresy

Wiemy, że wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią OY , podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią OX , podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymptota, wzór $x = -\frac{d}{c}$,
- pozioma asymptota, wzór $y = \frac{a}{c}$.

Musimy jeszcze pamiętać, że funkcja będzie symetryczna względem punktu przecięcia asymptot.

Wykresy

Wiemy, że wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Do narysowania danej funkcji będziemy potrzebowali następujących czterech rzeczy:

- przecięcie z osią OY , podstawiamy $x = 0$ i obliczamy $y = \frac{b}{d}$,
- przecięcie z osią OX , podstawiamy $y = 0$ i obliczamy $x = -\frac{b}{a}$,
- pionowa asymptota, wzór $x = -\frac{d}{c}$,
- pozioma asymptota, wzór $y = \frac{a}{c}$.

Musimy jeszcze pamiętać, że funkcja będzie symetryczna względem punktu przecięcia asymptot.

Nie warto uczyć się tych wzorów na pamięć. Lepiej po prostu umieć wszystko wyliczyć w konkretnym przypadku.

Asymptoty

Kilka słów wyjaśnienia odnośnie asymptot.

Asymptoty

Kilka słów wyjaśnienia odnośnie asymptot. Pionowa asymptota występuje wtedy, gdy mamy dzielenie niezerowej liczby przez 0, czyli dla danego x licznik jest niezerową liczbą, a mianownik wynosi 0. Nasza funkcja jest wtedy niezdefiniowana, ale bardzo blisko tego x funkcja przyjmuje wartości bardzo duże na plusie lub na minusie (bliskie ∞ lub $-\infty$). Chodzi o to, że dzielimy jakąś liczbę przez coś co jest *prawie* zerem, więc wychodzi nam *prawie* $\pm\infty$.

Asymptoty

Asymptota pozioma to pozioma prosta, do której nasza funkcja się zbliża, gdy x jest bardzo duży na plusie lub minusie (a dokładniej - gdy x dąży do $\pm\infty$). W praktyce, gdy mamy do czynienia z funkcją $\frac{ax + b}{cx + d}$, to dla x bliskich nieskończoności stałe b i d są względem x tak małe, że w praktyce zostajemy z ułamkiem $\frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$

Asymptoty

Asymptota pozioma to pozioma prosta, do której nasza funkcja się zbliża, gdy x jest bardzo duży na plusie lub minusie (a dokładniej - gdy x dąży do $\pm\infty$). W praktyce, gdy mamy do czynienia z funkcją $\frac{ax + b}{cx + d}$, to dla x bliskich nieskończoności stałe b i d są względem x tak małe, że w praktyce zostajemy z ułamkiem $\frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$

Te rozważania nie są precyzyjne matematycznie. Lepiej je zrozumiecie przy okazji analizy matematycznej.

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład.

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY ,

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , pod x podstawiamy 0 i obliczamy

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , pod x podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , pod x podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią OX ,

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , pod x podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią OX , pod y podstawiamy 0 i obliczamy

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , pod x podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią OX , pod y podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , pod x podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią OX , pod y podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,
- pionowa asymptota,

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , pod x podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią OX , pod y podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,
- pionowa asymptota, sprawdzamy, kiedy mianownik jest 0,

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , pod x podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią OX , pod y podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,
- pionowa asymptota, sprawdzamy, kiedy mianownik jest 0, wzór $x = -1$,

Przykład 1

Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , pod x podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią OX , pod y podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,
- pionowa asymptota, sprawdzamy, kiedy mianownik jest 0, wzór $x = -1$,
- pozioma asymptota,

Przykład 1

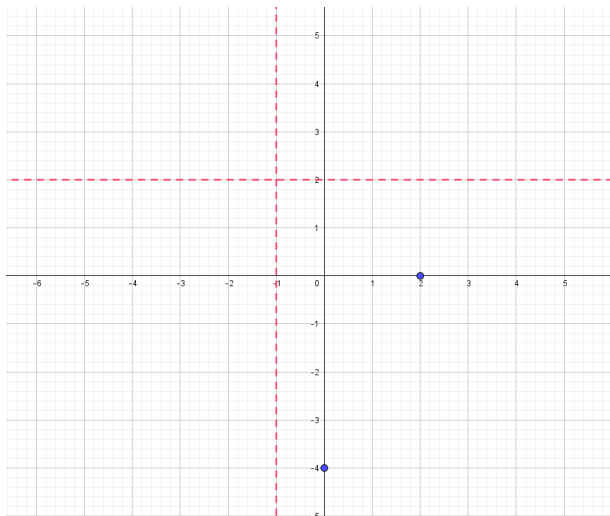
Omówmy konkretny przykład. Chcemy narysować funkcję $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , pod x podstawiamy 0 i obliczamy $y = -4$,
- przecięcie z osią OX , pod y podstawiamy 0 i obliczamy $x = 2$,
- pionowa asymptota, sprawdzamy, kiedy mianownik jest 0, wzór $x = -1$,
- pozioma asymptota, dla dużych x mamy $y = \frac{2x - 4}{x + 1} \approx \frac{2x}{x} = 2$, wzór $y = 2$.

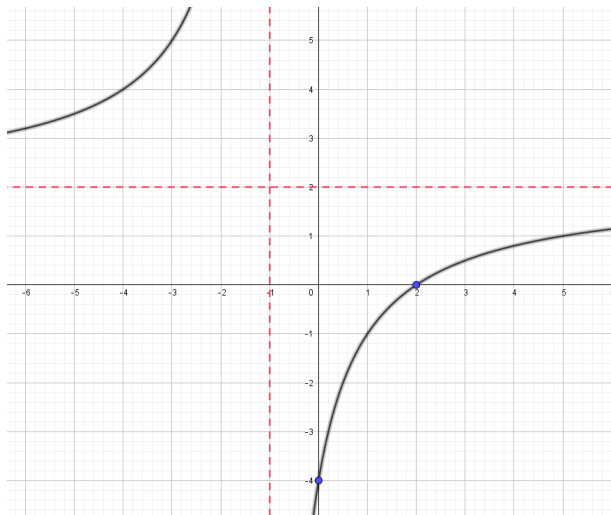
Przykład 1

Zaznaczamy te cechy na wykresie:



Przykład 1

Rysujemy hiperbolę:



Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{x - 3}{3x + 6}$.

Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{x - 3}{3x + 6}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{x - 3}{3x + 6}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY ,

Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{x - 3}{3x + 6}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -\frac{1}{2}$,

Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{x - 3}{3x + 6}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią OX ,

Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{x-3}{3x+6}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią OX , $x = 3$,

Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{x - 3}{3x + 6}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią OX , $x = 3$,
- pionowa asymptota,

Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{x - 3}{3x + 6}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią OX , $x = 3$,
- pionowa asymptota, wzór $x = -2$,

Przykład 2

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{x - 3}{3x + 6}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią OX , $x = 3$,
- pionowa asymptota, wzór $x = -2$,
- pozioma asymptota,

Przykład 2

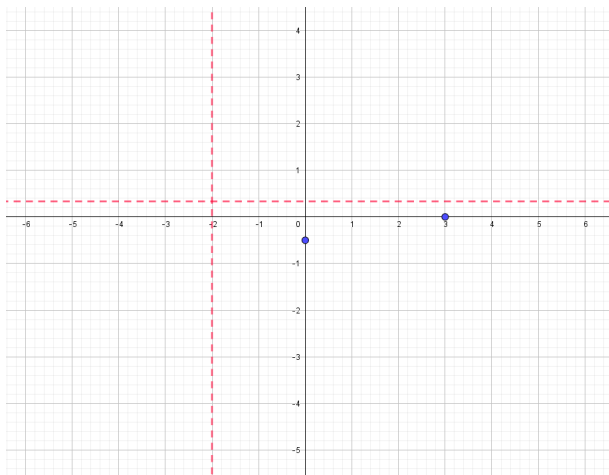
Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{x - 3}{3x + 6}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -\frac{1}{2}$,
- przecięcie z osią OX , $x = 3$,
- pionowa asymptota, wzór $x = -2$,
- pozioma asymptota, wzór $y = \frac{1}{3}$.

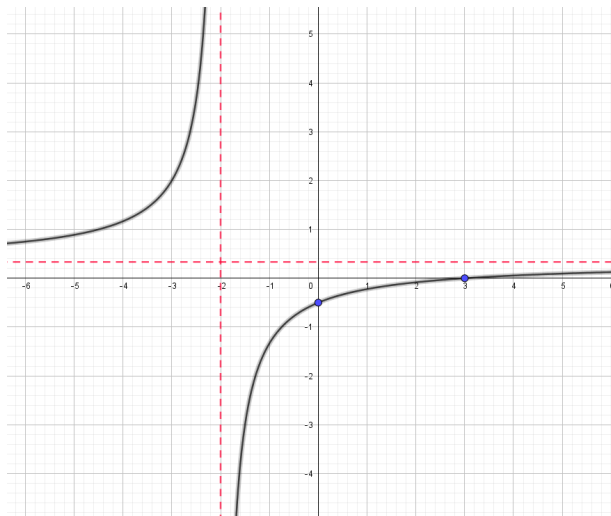
Przykład 2

Zaznaczamy te cechy na wykresie:



Przykład 2

Rysujemy hiperbolę:



Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$.

Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY ,

Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = \frac{2}{3}$,

Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią OX ,

Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią OX , $x = 2$,

Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią OX , $x = 2$,
- pionowa asymptota,

Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią OX , $x = 2$,
- pionowa asymptota, wzór $x = -3$,

Przykład 3

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią OX , $x = 2$,
- pionowa asymptota, wzór $x = -3$,
- pozioma asymptota,

Przykład 3

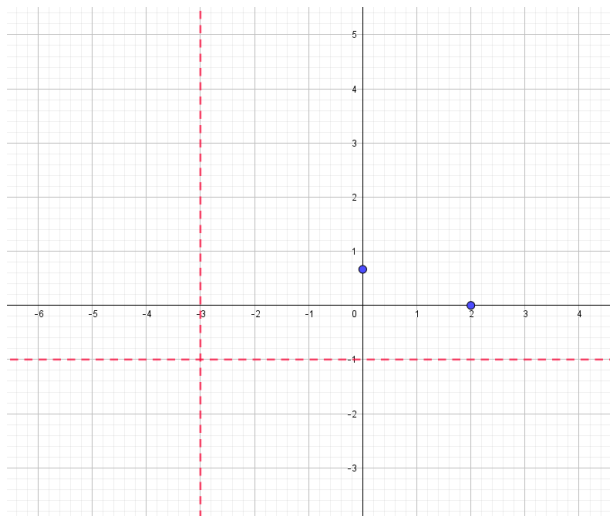
Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = \frac{2}{3}$,
- przecięcie z osią OX , $x = 2$,
- pionowa asymptota, wzór $x = -3$,
- pozioma asymptota, wzór $y = -1$.

Przykład 3

Zaznaczamy te cechy na wykresie:



Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY ,

Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -1$,

Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -1$,
- przecięcie z osią OX ,

Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -1$,
- przecięcie z osią OX , nie ma,

Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -1$,
- przecięcie z osią OX , nie ma,
- pionowa asymptota,

Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -1$,
- przecięcie z osią OX , nie ma,
- pionowa asymptota, wzór $x = 1$,

Przykład 4

Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -1$,
- przecięcie z osią OX , nie ma,
- pionowa asymptota, wzór $x = 1$,
- pozioma asymptota,

Przykład 4

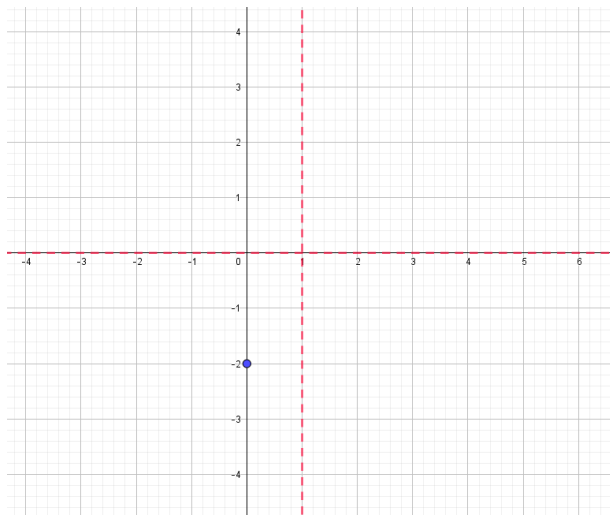
Narysujmy funkcję $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Określamy ważne cechy wykresu:

- przecięcie z osią OY , $y = -1$,
- przecięcie z osią OX , nie ma,
- pionowa asymptota, wzór $x = 1$,
- pozioma asymptota, wzór $y = 0$.

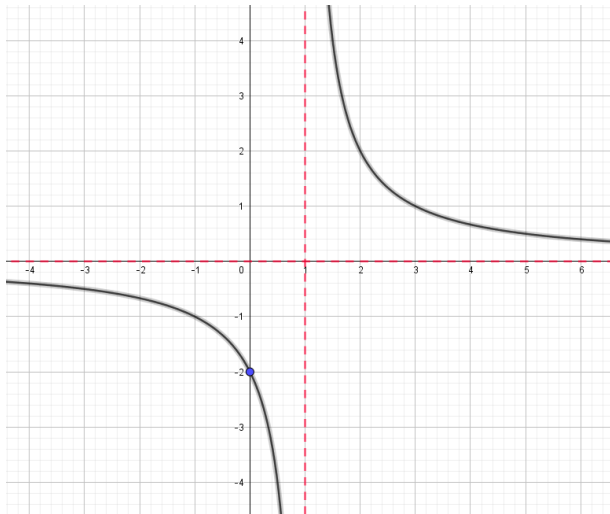
Przykład 4

Zaznaczamy te cechy na wykresie:



Przykład 4

Rysujemy hiperbolę:



W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.