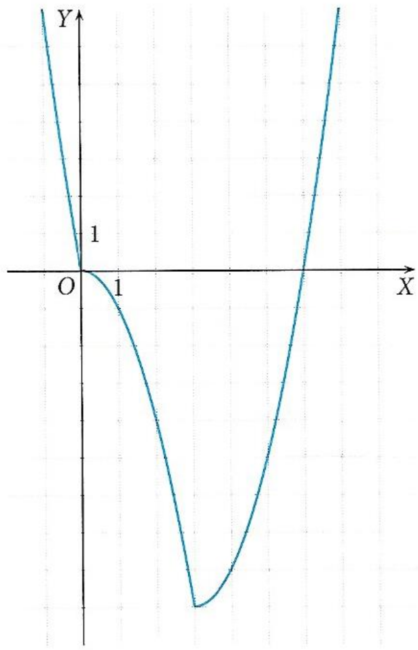
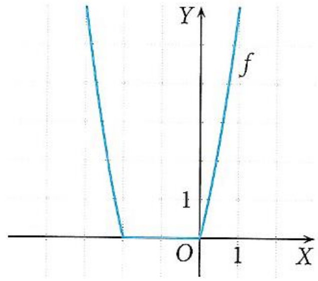
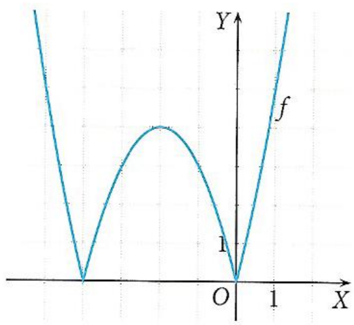
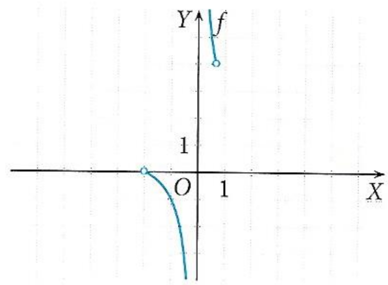
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
	Zauważenie, że jeśli $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; 5)$, to nierówność zachodzi dla $x \in \left\langle -2\sqrt{2}; 0\right) \cup \left\langle 1; 2\sqrt{2}\right\rangle$
1.	Zauważenie, że jeśli $x \in \langle 0; 1)$, to nierówność zachodzi dla $x \in \langle 0; 1)$
	Zauważenie, że jeśli $x \in \langle 5; \infty)$, to nierówność jest sprzeczna
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left\langle -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right\rangle$
	Zapisanie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej: $f(x) = a(x+1)(x-3)$, $a \neq 0$
2.	Obliczenie wartości wyrażenia: $\frac{f(6)}{f(12)} = \frac{a \cdot 7 \cdot 3}{a \cdot 13 \cdot 9} = \frac{7}{39}$
	Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $f(x) = \lvert x^2 - 3x \rvert - 3x$
	Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty) \\ -x^2 & \text{dla } x \in \langle 0; 3) \end{cases}$
3.	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
	Podanie odpowiedzi: $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
4.	Wprowadzenie funkcji $f(x)=x^2+2x+\lvert x^2+2x\rvert$ i zauważenie, że: $f(x)=\begin{cases} 2x^2+4x & \text{dla } x\in(-\infty;-2\rangle\cup\langle 0;\infty) \\ 0 & \text{dla } x\in(-2;0) \end{cases}$ Naszkicowanie wykresu funkcji f  Podanie odpowiedzi: 0 rozwiązań dla $m\in(-\infty;0)$, 2 rozwiązania dla $m\in(0;\infty)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m=0$
5.	Zapisanie wzoru funkcji: $f(x)=\lvert(x+2)^2-4\rvert$ oraz wyznaczenie wierzchołka i miejsc zerowych paraboli $y=(x+2)^2-4$: $W(-2,-4)$, $x_1=-4$, $x_2=0$ Naszkicowanie wykresu funkcji f  Zauważenie, że dla $p=-2$ równanie $f(x)=4$ ma trzy rozwiązania, zatem równanie $f(x)=6$ ma trzy rozwiązania, gdy $-2p=6$ Wyznaczenie wartości p: $p=-3$
6.	Zapisanie trójmianu kwadratowego: $20x^2-(24m+4)x+18m^2-12m+5$ oraz obliczenie jego wyróżnika: $\Delta=-96(3m-2)^2$ Zauważenie, że wyróżnik trójmianu jest niedodatni dla każdego m Zapisanie wniosku: Trójmian ten ma dodatni współczynnik przy x^2 oraz niedodatni wyróżnik dla każdego m, zatem dla każdego x wartość tego trójmianu jest nieujemna.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
7.	Zauważenie, że jeśli $m^2 - 1 = 0$, to funkcja f jest liniowa. Dla $m = -1$ otrzymujemy $f(x) = -4x + 2$, więc $m = -1$ nie spełnia warunków zadania. Dla $m = 1$ otrzymujemy $f(x) = 2$, więc $m = 1$ spełnia warunki zadania.
	Rozpatrzenie przypadku, gdy $m^2 - 1 \neq 0$ – wówczas funkcja f jest kwadratowa. Przyjmuje ona wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x, gdy $m^2 - 1 > 0$ oraz $\Delta < 0$
	Rozwiązanie nierówności $m^2 - 1 > 0$: $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
	Rozwiązanie nierówności $\Delta < 0$: $m \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$
	Podanie odpowiedzi: $m \in (-\infty; -3) \cup \langle 1; \infty)$
8.	Rozpatrzenie przypadku, gdy $m - 2 = 0$ – wówczas otrzymujemy nierówność $1 \geqslant 0$, czyli $m = 2$ spełnia warunki zadania
	Gdy $m - 2 \neq 0$, otrzymujemy nierówność kwadratową. Zachodzi ona dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$, gdy: $m - 2 > 0$ oraz $\Delta \leqslant 0$
	Podanie rozwiązania nierówności $\Delta \leqslant 0$: $m \in \langle 2; 6 \rangle$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \langle 2; 6 \rangle$
9.	Zapisanie warunków: $a < 0$, $\Delta < 0$
	Zauważenie, że $a < 0$ dla $m \in (3; \infty)$
	Zauważenie, że $\Delta < 0$ dla $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$
	Podanie odpowiedzi: $m \in (4; \infty)$
10.	Zapisanie warunków: $\Delta > 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 4(x_1 + x_2)$
	Zauważenie, że $\Delta > 0$ dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-4\}$
	Zapisanie warunku $x_1^2 + x_2^2 = 4(x_1 + x_2)$ za pomocą wzorów Viète'a: $\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = -4\frac{b}{a}$
	Rozwiązanie równania $m^2 - 8m + 16 + 8m = -4m + 16$: $m = -4$ lub $m = 0$
	Podanie odpowiedzi: $m = 0$
11.	Zapisanie i rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (2; 8)$
	Skorzystanie ze wzorów Viète'a i zapisanie równania: $x_1 + x_2 = -(m + 2)$
	Zapisanie równania: $x_1 x_2 = \frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + 5$
	Zapisanie równania: $m + 2 = \frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + 5$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $m = 3$
12.	Wyznaczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego: $\Delta = 36n^2$
	Obliczenie pierwiastków trójmianu: $x = -2n$ lub $x = 4n$
	Podanie wzoru funkcji: $f(n) = 4n - 1$, $n \in \mathbf{N}_+$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
13.	Wykorzystanie wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = \frac{n+2}{n}$
	Zapisanie dziedziny funkcji f oraz jej wzoru: $D = (-2;0) \cup (0;\frac{2}{3})$, $f(n) = \frac{n+2}{n}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
14.	Zapisanie warunków: $\Delta > 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$
	Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$
	Zapisanie warunku $x_1^2 + x_2^2 = 4(x_1 + x_2)$ za pomocą wzorów Viète'a: $\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = 1$
	Rozwiązanie równania $m^2 - 2m + 1 - 2m + 4 = 1$: $m = 2$
15.	Zapisanie warunków: $\Delta > 0$, $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$
	Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; \infty\right)$
	Zapisanie warunku $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$ za pomocą wzorów Viète'a: $\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} > 2m^2 - 13$
	Rozwiązanie nierówności $m^2 - 4 > 2m^2 - 13$: $m \in (-3;3)$
	Podanie odpowiedzi: $m \in \left(-3; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; 3\right)$
16.	Zapisanie układu warunków: $\begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4 \end{cases}$ obliczenie $\Delta = 4m(2m - 7)$ i wyznaczenie wartości m spełniających pierwsze dwa warunki: $m \neq -1$ oraz $4m(2m - 7) > 0$, stąd $m \in D = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{7}{2}; \infty\right) \setminus \{-1\}$
	Przekształcenie warunku $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$ dla $x_1 \neq x_2$ do postaci: $(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$
	Rozważenie przypadku $x_1 + x_2 = 0$ – skorzystanie ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = -2\frac{m-2}{m+1} = 0$ i obliczenie m: $m = 2 \notin D$
	Skorzystanie ze wzorów Viète'a do warunku $x_1^2 + x_2^2 = 1$: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{6m^2 - 22m + 8}{(m+1)^2} = 1$, stąd $5m^2 - 24m + 7 = 0$ i obliczenie m: $\Delta = 4 \cdot 109$, $m_1 = \frac{12 - \sqrt{109}}{5}$, $m_2 = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}$
	Sprawdzenie, że $m_1 \notin D$ i $m_2 \in D$ oraz podanie odpowiedzi: $m = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
17.	Zapisanie warunków: $\Delta \geqslant 0$, $x_1 = x_2^3$ Rozwiązanie nierówności $\Delta \geqslant 0$: $m \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{4}{3}; \infty\right)$ Skorzystanie ze wzorów Viète'a: $x_2 + x_2^3 = \frac{3m^3}{8}$ oraz $x_2 \cdot x_2^3 = \frac{m^4}{16}$ i rozwiązanie drugiego równania: $x_2 = \pm\frac{m}{2}$ Zauważenie, że równanie $-\frac{m^3}{8} - \frac{m}{2} = \frac{3m^3}{8}$ nie ma rozwiązania w przedziale: $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{4}{3}; \infty\right)$ Rozwiązanie równania $\frac{m^3}{8} + \frac{m}{2} = \frac{3m^3}{8}$: $m = -\sqrt{2}$ lub $m = \sqrt{2}$ Wyznaczenie rozwiązań wyjściowego równania: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i podanie odpowiedzi: $m \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$, $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
18.	Zapisanie warunków: $m > 0$, $y_w = 1$ Wyznaczenie Δ: $\Delta = m^3 - 3m + 1$ Wyznaczenie y_w: $y_w = \frac{-m^3+3m-1}{m}$ Rozwiązanie równania $\frac{-m^3+3m-1}{m} = 1$: $m = 1$ lub $m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ lub $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ Podanie odpowiedzi: $m = 1$ lub $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
19.	Zapisanie warunków: $\Delta \geqslant 0$, $x_1x_2 < 0$ lub $(x_1x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0)$ Rozwiązanie nierówności $\Delta \geqslant 0$: $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right\rangle \cup \langle 0; \infty)$ Rozwiązanie nierówności $x_1x_2 < 0$: $m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{4}; \infty\right)$ Zauważenie, że układ nierówności $x_1x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$ jest sprzeczny Podanie odpowiedzi: $m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{4}; \infty\right)$
20.	Zapisanie warunków: $\Delta > 0$, $x_1x_2 > 0$, $x_1 + x_2 < 0$ i $\lvert x_1 - x_2 \rvert = 4\sqrt{2}$ Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$ Rozwiązanie nierówności $x_1x_2 > 0$: $m \in \left(-1-\sqrt{5}; -1+\sqrt{5}\right)$ Rozwiązanie nierówności $x_1 + x_2 < 0$: $m \in (-\infty; 0)$ Zapisanie warunku $\lvert x_1 - x_2 \rvert = 4\sqrt{2}$ w postaci: $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 32$ oraz skorzystanie ze wzorów Viète'a: $\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = 32$ Rozwiązanie równania $8m^2 + 8m - 48 = 0$: $m = -3$ lub $m = 2$ i podanie odpowiedzi: $m = -3$
21. a)	Zauważenie, że liczba -3 jest rozwiązaniem równania: $(x+3)(x^2+5x+4) = 0$ Rozwiązanie równania kwadratowego $x^2 + 5x + 4 = 0$: $x = -1$, $x = -4$
21. b)	Zauważenie, że trójmian $w(x) = x^2 + (p+4)x + (p+1)^2$ nie ma rozwiązań dla $p \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ Zauważenie, że trójmian w ma tylko jeden pierwiastek równy -3, gdy $\Delta = 0$ i $\frac{-b}{2a} = -3$ Rozwiązanie układu równań: $p = 2$ Podanie odpowiedzi: $p \in (-\infty; -2) \cup \langle 2; \infty)$