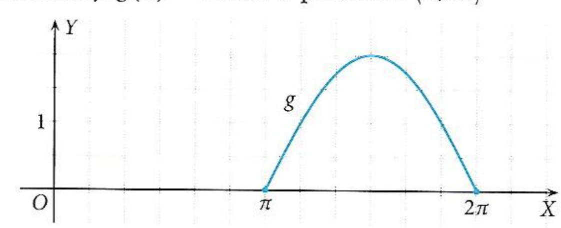
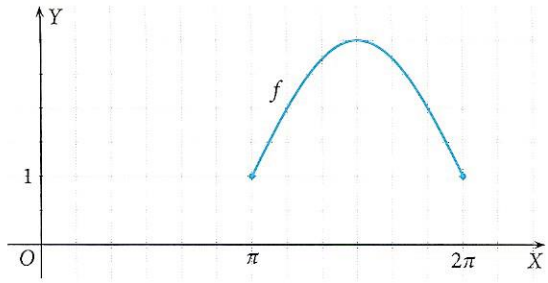
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wykorzystanie okresowości funkcji sinus i zapisanie równości: $\sin 395^\circ = \sin 35^\circ$
	Wykorzystanie wzorów redukcyjnych i zapisanie równości: $\cos 130^\circ = -\sin 40^\circ$
	Zastosowanie wzoru na cosinus sumy kątów i przekształcenie wyrażenia $\cos 35^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos 130^\circ \cdot \sin 395^\circ$ do postaci: $\cos(35^\circ + 40^\circ) = \cos 75^\circ$
	Zauważenie, że $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ)$, i wykorzystanie wzoru na cosinus sumy kątów: $\cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$
	Obliczenie wartości wyjściowego wyrażenia: $\cos 35^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos 130^\circ \cdot \sin 395^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
2.	Przekształcenie równania do postaci: $-2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0$
	Podstawienie niewiadomej pomocniczej: $t = \sin x$, gdzie $t \in \langle -1; 1 \rangle$, i zapisanie równania: $-2t^2 + 5t + 3 = 0$
	Wyznaczenie pierwiastków równania kwadratowego: $t_1 = 3$ lub $t_2 = -\frac{1}{2}$ i odrzucenie pierwiastka t_1
	Rozwiązanie równania $\sin x = -\frac{1}{2}$: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Zapisanie rozwiązań należących do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$
3.	Zapisanie założenia: $\cos x \neq 0$ i przekształcenie równania do postaci: $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
	Podstawienie niewiadomej pomocniczej: $t = \cos x$, gdzie $t \in \langle -1; 0) \cup (0; 1 \rangle$, i rozwiązanie równania kwadratowego $2t^2 - t - 1 = 0$: $t_1 = 1$ lub $t_2 = -\frac{1}{2}$
	Rozwiązanie równania $\cos x = 1$: $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Rozwiązanie równania $\cos x = -\frac{1}{2}$: $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Sformułowanie odpowiedzi: Największą liczbą ujemną spełniającą równanie jest $-\frac{2}{3}\pi$.
4.	Przekształcenie równania do postaci: $2\sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$
	Przekształcenie równania do postaci: $\cos 2x(2\sin 3x - 1) = 0$ i zapisanie, że $\cos 2x = 0$ lub $2\sin 3x - 1 = 0$
	Rozwiązanie równania $\cos 2x = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Rozwiązanie równania $2\sin 3x - 1 = 0$: $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k}{3}\pi$ lub $x = \frac{5}{18}\pi + \frac{2k}{3}\pi$, $k \in \mathbf{C}$
5.	Zapisanie nierówności w postaci: $\sin^2 x \geqslant \frac{1}{2}$
	Zapisanie nierówności w postaci: $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji sinus w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ i odczytanie zbioru rozwiązań nierówności: $x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi \rangle \cup \langle \frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi \rangle$
	Zapisanie całkowitych rozwiązań nierówności z przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$: 1, 2, 4, 5

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6.	Podniesienie obu stron równania do kwadratu i zapisanie równania w postaci: $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$
	Wykorzystanie tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i przekształcenie równości do postaci: $2\sin x\cos x = 1$
	Wykorzystanie wzoru na sinus podwojonego kąta i zapisanie równości: $\sin 2x = 1$
7.	Podniesienie obu stron równania do kwadratu i zapisanie równania w postaci: $1 - 2\sin x\cos x = \frac{1}{9}$
	Wyznaczenie wartości $\sin 2x = 2\sin x\cos x$: $\sin 2x = \frac{8}{9}$
	Wykorzystanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania: $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$
	Obliczenie wartości $\cos 4x$: $\cos 4x = -\frac{47}{81}$
8.	Skorzystanie ze wzoru na różnicę sinusów i zapisanie równania w postaci: $2\sin 2x\cos 3x = 0$
	Zapisanie warunku: $\sin 2x = 0$ lub $\cos 3x = 0$
	Wyznaczenie rozwiązań równania: $2x = k\pi$ lub $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$, czyli $x = k\frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{C}$
9.	Zauważenie, że $a^6 + b^6 = (a^2+b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) = (a^2+b^2)((a^2+b^2)^2 - 3a^2b^2)$
	Przekształcenie lewej strony równania: $L = 4(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)((\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = 4(1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$
	Przekształcenie prawej strony równania: $P = 1 + 3\cos^2 2\alpha = 1 + 3(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 = 1 + 3(1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = 4(1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$
	Podanie odpowiedzi: $L = P$, zatem równość jest prawdziwa.
10.	Wyznaczenie wartości parametru p: $p = -\frac{\pi}{2}$
	Wyznaczenie wartości parametru a: $a = 2$ i zapisanie wzoru funkcji: $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
	Wyznaczenie pierwiastków równania $f(x) = -\sqrt{2}$: $x = -\frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
	Zaznaczenie na wykresie zbioru rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant -\sqrt{2}$ i podanie odpowiedzi: $x \in \left\langle -\pi; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{4}\pi; \pi \right\rangle$
11.	Wykorzystanie wzorów redukcyjnych do przekształcenia wyrażenia: $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
	Wykorzystanie równości $\sin(-x) = -\sin x$ i zapisanie wzoru funkcji w postaci: $f(x) = 1 - 2\sin x$
	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = -2\sin x$ w przedziale $\langle \pi; 2\pi \rangle$ 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11. cd.	Naszkicowanie wykresu funkcji f w przedziale $\langle \pi; 2\pi \rangle$ 
	Sformułowanie odpowiedzi: $m \in \langle 1; 3)$
12.	Przekształcenie wzoru funkcji f do postaci: $f(x) = \cos^2 x + 2\cos x$ i wprowadzenie zmiennej pomocniczej $t = \cos x$. Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $f(t) = t^2 + 2t$, gdzie $t \in \langle -1; 1 \rangle$
	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli $y = t^2 + 2t$: $t_w = -1$, $y_w = -1$ i zauważenie, że dla $t \in \langle -1; 1 \rangle$ funkcja f jest rosnąca
	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji f: $f(D) = \langle -1; 3 \rangle$
	Zauważenie, że najmniejszą wartość funkcja przyjmuje dla $t = -1$
	Zapisanie równania: $\cos x = -1$
	Rozwiązanie równania: $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
13.	Założenie, że $\cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$
	Założenie, że $\sin x + 1 \neq 0$, czyli $x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$, i zapisanie dziedziny funkcji f: $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{C} \right\}$
	Przekształcenie wzoru funkcji f do postaci: $f(x) = \frac{\sin^2 x(1+\cos x)}{\cos^2 x(1+\sin x)}$
	Uzasadnienie, że dla $x \in D$: $\sin^2 x \geqslant 0$, $1 + \cos x \geqslant 0$, $\cos^2 x > 0$, $1 + \sin x > 0$
14.	Wykorzystanie wzoru na sinus sumy kątów i przekształcenie równania do postaci: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 4\sin m - 3$
	Zauważenie, że równanie ma rozwiązania, jeżeli $-1 \leqslant 4\sin m - 3 \leqslant 1$
	Rozwiązanie nierówności podwójnej: $\frac{1}{2} \leqslant \sin m \leqslant 1$
	Zauważenie, że powyższa nierówność jest równoważna nierówności $\sin m \geqslant \frac{1}{2}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji $y = \sin m$ i zaznaczenie rozwiązania nierówności
	Podanie odpowiedzi: $m \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{C}$

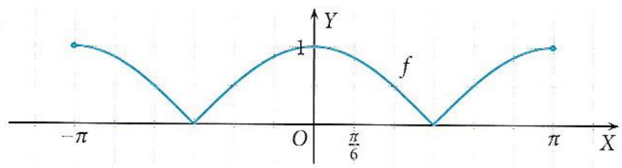
<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td>15.</td><td>

Przekształcenie wzoru funkcji f do postaci: $f(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|$

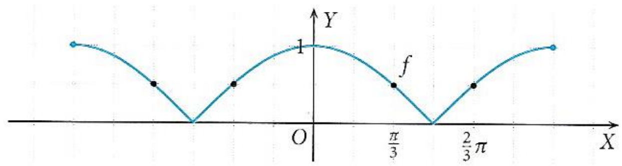
Wykorzystanie wzorów redukcyjnych i przekształcenie wzoru funkcji do postaci:

$$f(x)=|\cos x|$$

Naszkicowanie wykresu funkcji f w przedziale $\langle-\pi;\pi\rangle$



Zaznaczenie na wykresie rozwiązań równania $f(x)=\frac{1}{2}$



Sformułowanie odpowiedzi: Funkcja przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$ dla $x\in\left\{-\frac{2}{3}\pi,-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right\}$.

</td></tr>
<tr><td>16.</td><td>

Wykorzystanie wzoru na sinus podwojonego kąta i przekształcenie równania do postaci:

$$(1-\cos x)(2\sin x+\sqrt{2})=0$$

Zapisanie rozwiązania równania w postaci: $\cos x=1$ lub $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Rozwiązanie równania $\cos x=1$ w przedziale $\langle-\pi;\pi\rangle$: $x=0$

Rozwiązanie równania $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle-\pi;\pi\rangle$: $x=-\frac{\pi}{4}$ lub $x=-\frac{3}{4}\pi$

Wyznaczenie zbioru A: $A=\left\{-\frac{3}{4}\pi,-\frac{\pi}{4},0\right\}$ i zbioru zdarzeń sprzyjających: $\left\{-\frac{3}{4}\pi,-\frac{\pi}{4}\right\}$

Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania liczby ujemnej: $\frac{2}{3}$

</td></tr>
<tr><td>17.</td><td>

Wyznaczenie zbioru wartości funkcji $f(x)=\sin^2 4x$: $f(D)=\langle 0;1\rangle$

Zapisanie układu nierówności:

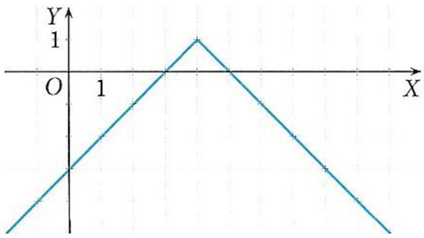
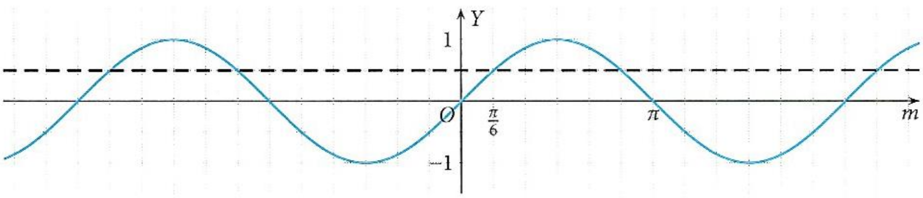
$$\begin{cases}4-\frac{m+10}{2m}\leqslant 1\\ 4-\frac{m+10}{2m}\geqslant 0\\ m\neq 0\end{cases}$$

Rozwiązanie pierwszej nierówności: $m\in(0;2\rangle$

Rozwiązanie drugiej nierówności: $m\in(-\infty;0)\cup\left\langle\frac{10}{7};\infty\right)$

Podanie odpowiedzi: $m\in\left\langle\frac{10}{7};2\right\rangle$

</td></tr>
</table>

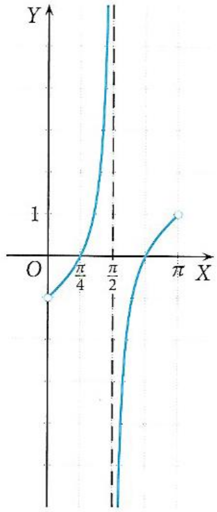
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
18.	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji $f(x) = \|3 - 4\sin x\|$: $f(D) = \langle 0; 7\rangle$
	Zauważenie, że równanie jest sprzeczne, gdy $a^2 + 3 < 0$ lub $a^2 + 3 > 7$
	Zauważenie, że nierówność $a^2 + 3 < 0$ jest sprzeczna, i rozwiązanie nierówności $a^2 + 3 > 7$
	Sformułowanie odpowiedzi: $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
19. a)	Zapisanie warunku: $\sin x = 0$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
	Rozwiązanie równania $\sin x = 0$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$: $x = -\pi$ lub $x = 0$ lub $x = \pi$
	Rozwiązanie równania $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$: $x = -\frac{\pi}{4}$ lub $x = -\frac{3}{4}\pi$
	Rozwiązanie równania $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{3}{4}\pi$ i podanie odpowiedzi: $x \in \left\{-\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \pi\right\}$
19. b)	Zauważenie, że równanie $\sin x(\sin^2 x - p) = 0$ ma w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$ dokładnie trzy różne rozwiązania wtedy, gdy równanie $\sin^2 x - p = 0$ jest sprzeczne lub gdy $p = 0$
	Wyznaczenie tych wartości parametru p, dla których równanie $\sin^2 x = p$ jest sprzeczne: $p \notin \langle 0; 1\rangle$ i sformułowanie odpowiedzi: $p \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
20.	Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = 1 - \|x - 4\|$ 
	Zauważenie, że równanie nie ma rozwiązań, gdy $\sin m > \frac{1}{2}$. Naszkicowanie wykresu funkcji $g(m) = \sin m$, odczytanie rozwiązania tej nierówności i podanie, że równanie nie ma rozwiązań dla: $m \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{C}$ 
	Zauważenie, że równanie ma jedno rozwiązanie, gdy $\sin m = \frac{1}{2}$, czyli dla: $m \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi:\ k \in \mathbf{C}\right\}$
	Zauważenie, że równanie ma dwa rozwiązania, gdy $\sin m < \frac{1}{2}$, czyli dla: $m \in \left(-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td>21.</td><td>

Uproszczenie wzoru funkcji dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$

Uproszczenie wzoru funkcji dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$: $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$

Naszkicowanie wykresu funkcji f



Odczytanie rozwiązania nierówności $f(x) \geqslant 0$: $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left\langle \frac{3}{4}\pi; \pi\right)$

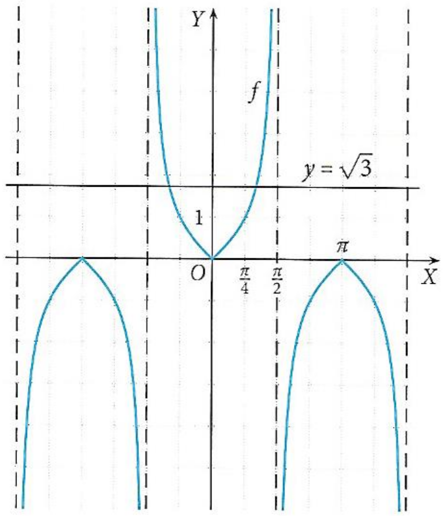
</td></tr>
<tr><td>22.</td><td>

Przekształcenie równania funkcji f do postaci: $f(x) = \frac{|\sin x|}{\cos x}$

Zapisanie równania funkcji w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{dla} \quad \sin x \geqslant 0 \\ -\operatorname{tg} x & \text{dla} \quad \sin x < 0 \end{cases}$$

Naszkicowanie wykresu funkcji f



Odczytanie rozwiązania równania $f(x) = \sqrt{3}$: $x = -\frac{\pi}{3}$ lub $x = \frac{\pi}{3}$

</td></tr>
</table>