# Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

| Numer zadania | Etapy rozwiązania zadania |
|---|---|
| 1. | Zapisanie nierówności: $x^3 + x^2 + x \geqslant 3x^2 + 3x + 3$ |
| | Przekształcenie nierówności do postaci: $(x^2 + x + 1)(x - 3) \geqslant 0$ |
| | Podanie odpowiedzi: $x \in \langle 3; \infty)$ |
| 2. | Obliczenie $m$: $m = 4$ |
| | Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x) = (x^2 - 4)(3x + 1)$ |
| | Podanie odpowiedzi: $m = 4$, pozostałe pierwiastki: $-2$, $-\frac{1}{3}$ |
| 3. | Zapisanie równania: $2m^3 - 9m^2 + 7m + 6 = 0$ |
| | Zauważenie, że liczba 2 jest pierwiastkiem równania |
| | Zapisanie równania w postaci: $(m - 2)(2m^2 - 5m - 3) = 0$ |
| | Podanie odpowiedzi: $m \in \left\{-\frac{1}{2}, 2, 3\right\}$ |
| 4. | Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x) = (x - 2)^3(x - r)$, gdzie $r$ jest drugim pierwiastkiem wielomianu |
| | Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x) = x^4 - x^3(r + 6) + x^2(6r + 12) - x(12r + 8) + 8r$ |
| | Zapisanie układu równań: $\begin{cases} r + 6 = 5 \\ 6r + 12 = m \\ 12r + 8 = -4 \\ 8r = n \end{cases}$ |
| | Podanie odpowiedzi: $m = 6$, $n = -8$ |
| 5. | Zastosowanie podstawienia $x^2 = t > 0$ oraz zapisanie równania w postaci: $(m + 1)t^2 - (m + 1)t + 4m = 0$ |
| | Zapisanie układu nierówności: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$ |
| | Zauważenie, że $\Delta > 0$ dla $m \in \left(-1; \frac{1}{15}\right)$ |
| | Zauważenie, że $t_1 \cdot t_2 > 0$ dla $m \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$ |
| | Zauważenie, że $t_1 + t_2 > 0$ dla $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ |
| | Podanie odpowiedzi: $m \in \left(0; \frac{1}{15}\right)$ |

| Numer zadania | Etapy rozwiązania zadania |
|---|---|
| 6. | Zauważenie, że $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $w$ |
| | Wyznaczenie pozostałych pierwiastków wielomianu: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ |
| | Wyznaczenie sumy kwadratów pierwiastków: 10 |
| 7. | Przedstawienie wielomianu $w$ w postaci: $w(x) = x[px^2 + x(p-2) - 1 - 2p]$ i zauważenie, że jednym z pierwiastków wielomianu jest $x = 0$ |
| | Zauważenie, że dla $p \neq 0$ w nawiasie mamy trójmian kwadratowy, a dla $p \neq \frac{1}{2}$ trójmian ten nie ma pierwiastka równego zero |
| | Wyznaczenie wyróżnika trójmianu $px^2 + x(p-2) - 1 - 2p$: $\Delta = 9p^2 + 4$ |
| | Zauważenie, że wyróżnik jest dodatni dla dowolnego $p$, zatem trójmian ten ma dwa różne pierwiastki |
| | Podanie odpowiedzi: Dla $p \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$ wielomian $w$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste. |
| 8. | Przedstawienie wielomianu $w$ w postaci: $w(x) = x[x^2 + x(p+3) + 4p]$ i zauważenie, że jednym z pierwiastków wielomianu jest $x = 0$ |
| | Zauważenie, że nie istnieje wartość $p$, dla której trójmian $x^2 + x(p+3) + 4p$ ma podwójny pierwiastek $x = 0$ i wyznaczenie wyróżnika trójmianu $x^2 + x(p+3) + 4p$: $\Delta = p^2 - 10p + 9$ |
| | Zauważenie, że wielomian $w$ ma dokładnie jeden pierwiastek $x = 0$, gdy $\Delta < 0$, czyli dla $p \in (1; 9)$ |
| 9. | Wyznaczenie wartości $w(a+b) = (a+b)^3 - (a-b)(a+b)^2 - 2b(a+b)^2$ |
| | Zapisanie $w(a+b)$ w postaci: $w(a+b) = (a+b)^2(a+b-a+b-2b)$ |
| | Zauważenie, że $w(a+b) = (a+b)^2 \cdot 0 = 0$ |
| | Zapisanie wniosku: $x = a + b$ jest pierwiastkiem wielomianu $w$, zatem wielomian ten jest podzielny przez dwumian $q(x) = x - a - b$. |
| 10. | Zapisanie wzoru wielomianu $w$: $w(x) = (x+1)(x+2)(x+3)q(x)$ |
| | Zauważenie, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$: $$w(n) = (n+1)(n+2)(n+3)q(n)$$ jest iloczynem, którego czynnikami są trzy kolejne liczby naturalne |
| | Zauważenie, że wśród dowolnych dwóch kolejnych liczb naturalnych znajduje się liczba podzielna przez 2, a wśród trzech – liczba podzielna przez 3 |
| | Zapisanie wniosku: Liczba $w(n)$ jest podzielna przez 2 i przez 3, zatem jest podzielna przez 6. |

| Numer zadania | Etapy rozwiązania zadania |
|---|---|
| 11. | Zapisanie równania: $1+m+n+4=0$<br>Zapisanie równania: $-1+m-n+4=8$<br>Obliczenie $m$ i $n$: $m=0$, $n=-5$<br>Zapisanie nierówności: $x^3-x^2-4x+4\geqslant 0$<br>Obliczenie pierwiastków równania $x^3-x^2-4x+4=0$: $x\in\{-2,1,2\}$<br>Podanie odpowiedzi: $x\in\langle -2;1\rangle\cup\langle 2;\infty)$ |
| 12. | Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x)=(2x+1)(x^2-3)$<br>Wyznaczenie pierwiastków wielomianu: $x\in\left\{-\sqrt{3},-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right\}$<br>Obliczenie $x_1$: $x_1=-\sqrt{3}$<br>Obliczenie $x_2$: $x_2=-\frac{1}{2}$<br>Obliczenie $x_3$: $x_3=\sqrt{3}$ |
| 13. | Zapisanie równania: $m^3-5m^2-7m-1=0$<br>Zauważenie, że liczba $-1$ jest pierwiastkiem równania<br>Zapisanie równania w postaci: $(m+1)(m^2-6m-1)=0$<br>Podanie odpowiedzi: $m\in\left\{-1,3-\sqrt{10},3+\sqrt{10}\right\}$ |
| 14. | Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x)=x(x^6-3mx^3+2m^2-4)$ i zauważenie, że jednym z pierwiastków wielomianu $w$ jest liczba 0 oraz że wielomian $$u(x)=x^6-3mx^3+2m^2-4$$ musi mieć dwa pierwiastki<br>Zastosowanie podstawienia $x^3=t$ oraz zapisanie wielomianu $u$ w postaci: $$u(t)=t^2-3mt+2m^2-4$$<br>Zapisanie warunków: $\Delta>0$, $t_1+t_2=6$<br>Zauważenie, że $\Delta>0$ dla $m\in\mathbf{R}$<br>Zauważenie, że $t_1+t_2=6$ dla $m=2$ |
| 15. | Zapisanie warunku $1+a+b+c=0$ i zauważenie, że jest on równoważny warunkowi $w(1)=0$, czyli $x=1$ jest pierwiastkiem wielomianu $w$<br>Zapisanie trójmianu kwadratowego w postaci iloczynowej: $w(x)=(x-1)(x-x_1)(x-x_2)$<br>Rozważenie przypadku: pierwiastkami są liczby 1, 4, 7 $$w(x)=(x-1)(x-4)(x-7)=x^3-12x^2+39x-28$$ Wówczas $a=-12$, $b=39$, $c=-28$ |

| Numer zadania | Etapy rozwiązania zadania |
|---|---|
| 15. cd. | Rozważenie przypadku: pierwiastkami są liczby −2, 1, 4<br>$w(x)=(x+2)(x-1)(x-4)=x^3-3x^2-6x+8$<br>Wówczas $a=-3$, $b=-6$, $c=8$ |
| | Rozważenie przypadku: pierwiastkami są liczby −5, −2, 1<br>$w(x)=(x+5)(x+2)(x-1)=x^3+6x^2+3x-10$<br>Wówczas $a=6$, $b=3$, $c=-10$ |
| | Podanie odpowiedzi |
| 16. | Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x)=(x-1)(8x^2+4x-14)-5$ |
| | Zapisanie wielomianu w postaci: $w(x)=8x^3-4x^2-18x+9$ |
| | Przekształcenie wielomianu do postaci: $w(x)=(2x-1)(4x^2-9)$ |
| | Obliczenie pierwiastków wielomianu: $x\in\left\{-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$ |
| 17. | Zapisanie wzoru wielomianu w postaci iloczynowej: $f(x)=a(x+6)(x+5)(x+3)$ |
| | Obliczenie $a$: $a=1$ oraz zapisanie wzoru funkcji $f$: $f(x)=(x+6)(x+5)(x+3)$ |
| | Zapisanie wzoru funkcji $f$ w postaci: $f(x)=x^3+14x^2+63x+90$ |
| | Wykazanie, że $-f(-x)=g(x)$ dla $x\in\mathbf{R}$ |
| 18. | Zapisanie wzoru wielomianu $q$ w postaci iloczynowej: $q(x)=(x-1)(x+2)(x+3)$ |
| | Zapisanie równania: $a-4b+2c+13=0$ |
| | Zapisanie równania: $16a-4b-4c-20=0$ |
| | Zapisanie równania: $81a-6c-231=0$ |
| | Obliczenie $a$: $a=3$ |
| | Obliczenie $b$ i $c$: $b=5$, $c=2$ |
| 19. | Zauważenie, że liczba 2 jest pierwiastkiem równania |
| | Zapisanie równania w postaci: $(x-2)(-x^2-m^2x+4)=0$ |
| | Zauważenie, że wielomian $u(x)=-x^2-m^2x+4$ ma dwa pierwiastki różne od 2 dla $m\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ |
| | Zauważenie, że $2+x_1+x_2=2-m^2$, gdzie $x_1$, $x_2$ są pierwiastkami wielomianu $u$ |
| | Podanie odpowiedzi: $m=-3$ lub $m=3$ |