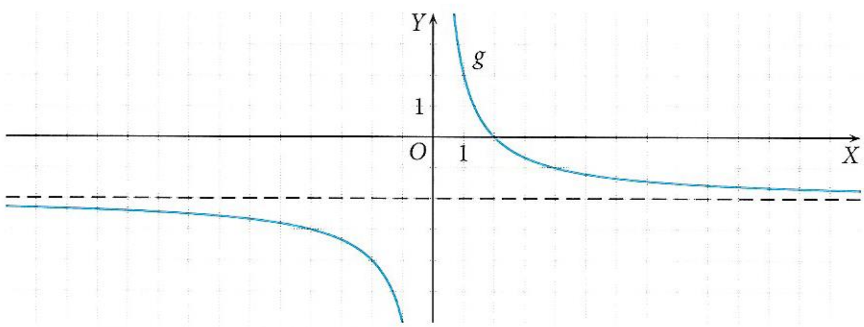
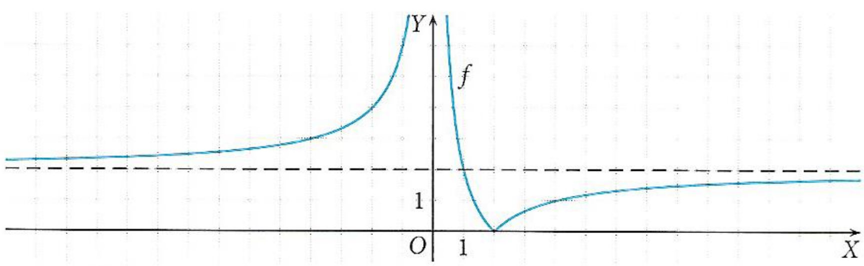
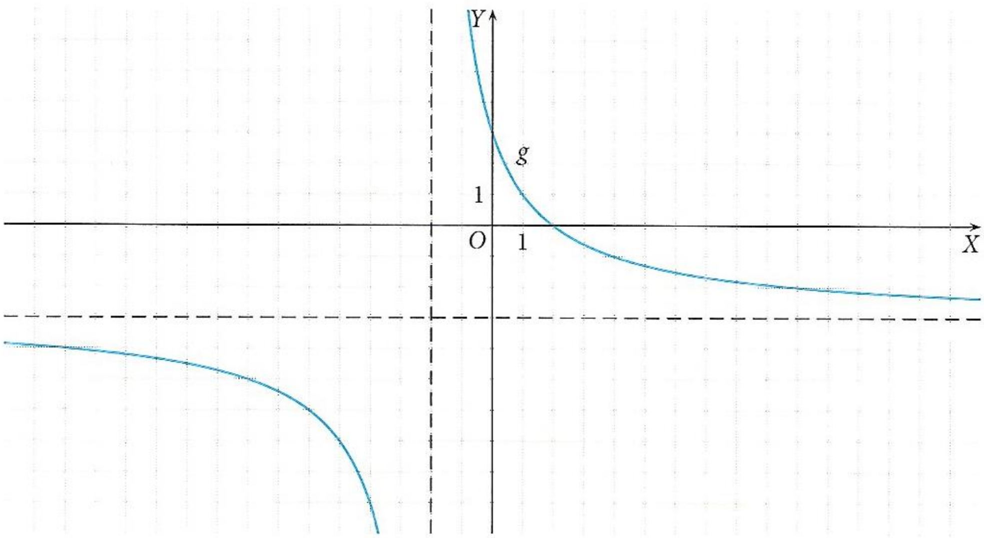
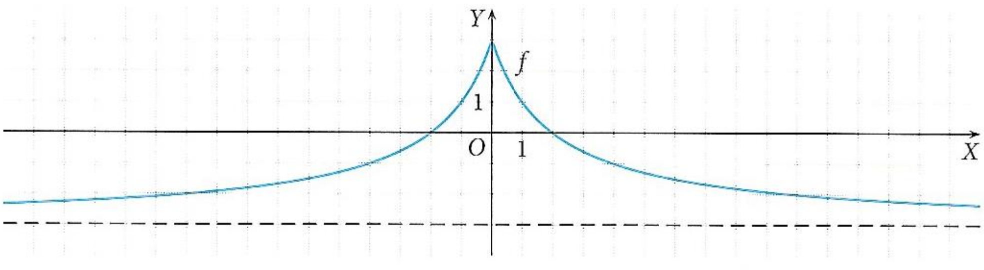
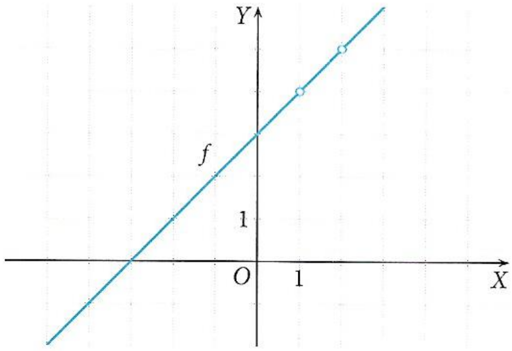
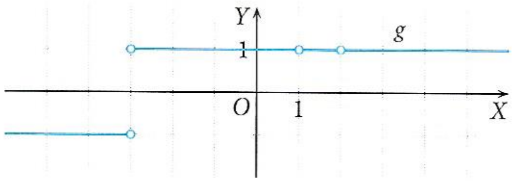
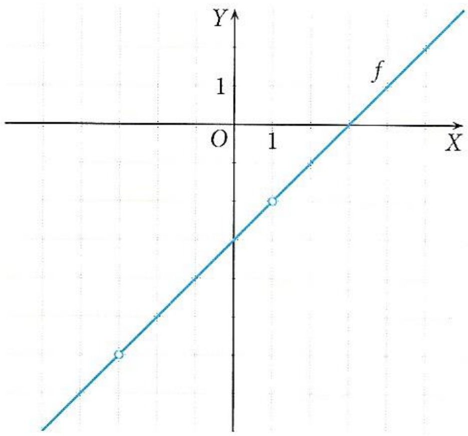
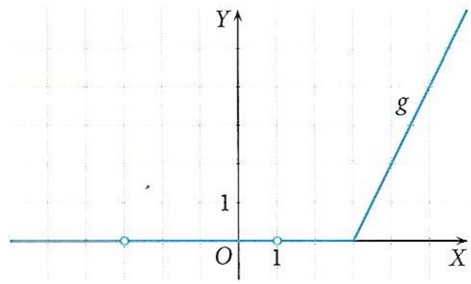
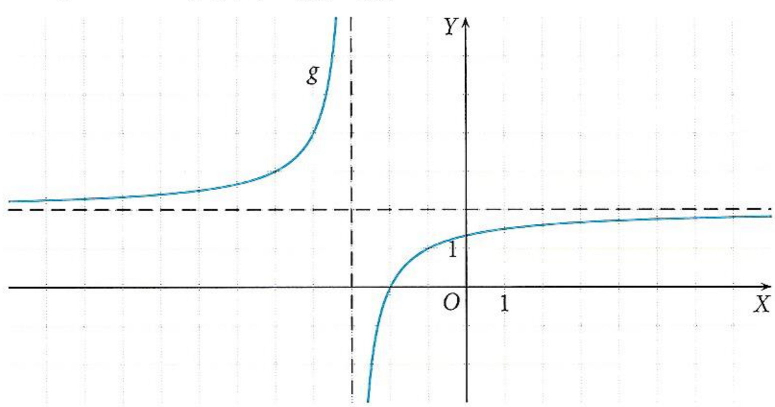
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

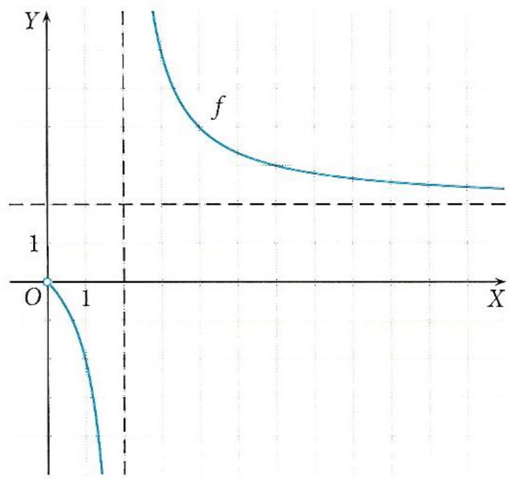
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Obliczenie: $f(x+1) = 1 - \frac{2}{x}$
	Zapisanie nierówności w postaci: $1 - \frac{2}{x} < 1 - \frac{2}{x-1}$ i podanie założeń: $x \neq 0$, $x \neq 1$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $-2x(x-1) > 0$
	Rozwiązanie nierówności: $x \in (0;1)$
2.	Wyznaczenie zbioru A': $A' = \langle 0;5 \rangle$
	Zapisanie zbioru B' w postaci: $B' = \{x \in \mathbf{R}\colon x^3 + 10x^2 > x^4 - 8x\}$
	Zapisanie nierówności: $x(x^3 - x^2 - 10x - 8) < 0$

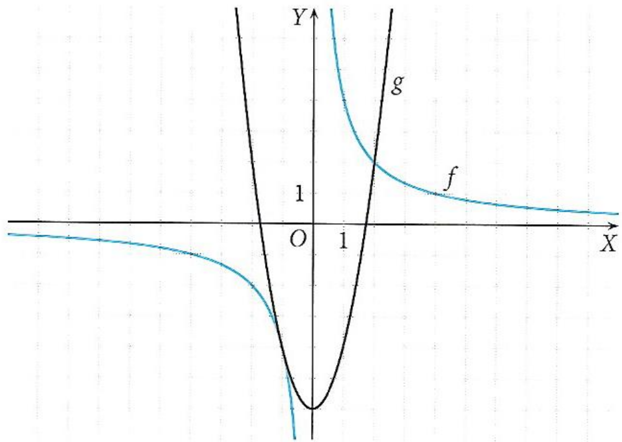
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
	Zauważenie, że pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ jest liczba -1
2. cd.	Wyznaczenie pozostałych pierwiastków wielomianu w: $x = -2$, $x = 4$
	Wyznaczenie zbioru B': $B' = (-2; -1) \cup (0; 4)$
	Wyznaczenie zbioru: $A' \cap B' = (0; 4)$
	Obliczenie a: $a = 2$
	Obliczenie b: $b = 3$
3.	Zapisanie wzoru funkcji f: $f(x) = \frac{3}{2(x-2)} + 3$
	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci: $f(x) = \frac{6x-9}{2(x-2)}$
	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji: $\frac{3}{2}$
	Podanie wartości b: $b = 1$
4. a)	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci: $f(x) = 2 + \frac{a-2}{x+1}$
	Podanie równania asymptoty poziomej: $y = 2$
4. b)	Obliczenie a z warunku $a - 2 = 2$: $a = 4$
	Zapisanie warunku: $xy = x + y + 2$
5.	Przekształcenie warunku do postaci: $y = 1 + \frac{3}{x-1}$
	Podanie dziedziny i zbioru wartości funkcji f: $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$
6. a)	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = \frac{4}{x} - 2$  Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \lvert g(x) \rvert$  Odczytanie rozwiązania równania $f(x) = 2$: $x = 1$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6. b)	Zauważenie, że dla $p > 0$ równanie $\lvert a - p \rvert = p$ zachodzi, gdy $a = 0$ lub $a = 2p$
	Zauważenie, że $\frac{4}{x} \neq 0$, więc równanie $\left\lvert \frac{4}{x} - p \right\rvert = p$ ma dokładnie jedno rozwiązanie
7. a)	Odczytanie z wykresu wartości parametru b: $b = 2$
	Wykorzystanie współrzędnych punktu $(0, 2)$ do obliczenia wartości parametru a: $a = 4$
7. b)	Zapisanie nierówności: $\frac{3x+4}{x+2} < \frac{3x+1}{x+1}$, $x \neq -2$, $x \neq -1$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\frac{2}{(x+2)(x+1)} < 0$
	Zapisanie nierówności w postaci: $(x+2)(x+1) < 0$ i podanie rozwiązania: $x \in (-2; -1)$
8.	Obliczenie: $f(x+1) = \frac{2x-2}{x+1}$ i $f(x-1) = \frac{2x-6}{x-1}$ i podanie założeń: $x \neq -1$, $x \neq 1$
	Przekształcenie nierówności $\frac{f(x+1)}{f(x-1)} > 0$ do postaci: $\frac{2(x-1)^2}{(x+1)(2x-6)} > 0$ i podanie założenia $x \neq 3$
	Zauważenie, że $(x-1)^2 > 0$ dla każdego $x \neq 1$, i sprowadzenie zadania do rozwiązania nierówności: $(x+1)(2x-6) > 0$
	Podanie rozwiązania nierówności: $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$
9.	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = \frac{12}{x+2} - 3$ 
	Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \frac{12}{\lvert x \rvert + 2} - 3$ 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
9. cd.	Zapisanie warunku: $m^2 \in (-3;3)$ Podanie odpowiedzi: $m \in \left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$
10.	Przekształcenie wzoru funkcji f i zapisanie jej dziedziny: $f(x)=x+3$, $D=\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$ Naszkicowanie wykresu funkcji f  Podanie zbioru wartości funkcji f: $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{4,5\}$ Zapisanie wzoru funkcji g w postaci: $g(x)=\begin{cases}-1 & \text{dla } x\in(-\infty;-3)\\ 1 & \text{dla } x\in(-3;1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)\end{cases}$ Naszkicowanie wykresu funkcji g  Podanie zbioru wartości funkcji g: $g(D)=\{-1,1\}$
11.	Zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x)=x-3$, gdzie $x\in\mathbf{R}\setminus\{-3,1\}$ Naszkicowanie wykresu funkcji f 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11. cd.	Zapisanie wzoru funkcji g w postaci: $$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x\in(-\infty;-3)\cup(-3;1)\cup(1;3) \\ 2x-6 & \text{dla } x\in\langle 3;\infty) \end{cases}$$
	Naszkicowanie wykresu funkcji g 
12.	Zauważenie, że równanie $\lvert x+3\rvert=a$ ma dwa pierwastki $x=a-3$ i $x=-a-3$, gdy $a>0$
	Zauważenie, że pierwiastki te mają różne znaki, gdy $(a-3)(a+3)>0$
	Podanie rozwiązania nierówności przy uwzględnieniu warunku $a>0$: $a>3$
	Zapisanie nierówności $\frac{m}{m-4}>3$ i przekształcenie jej do postaci: $(m-6)(m-4)<0$
	Podanie odpowiedzi: $m\in(4;6)$
13.	Zapisanie równania hiperboli: $y=f(x+2)+1=\frac{8}{x+2}+1$
	Zapisanie równania $\frac{8}{x+2}+1=x^2+4x+5$, $x\neq-2$, i przekształcenie go do postaci: $x^3+6x^2+12x=0$
	Przekształcenie równania do postaci: $x(x^2+6x+12)=0$ i wyznaczenie pierwiastka: $x=0$
	Uzasadnienie, że równanie $x^2+6x+12=0$ nie ma pierwiastków
	Sformułowanie odpowiedzi: Jedynym punktem wspólnym paraboli i hiperboli jest $(0,5)$.
14. a)	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x)=\frac{2x+4}{x+3}=\frac{-2}{x+3}+2$ 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
14. a) cd.	Zapisanie wzoru funkcji f: $f(x)=\frac{2}{x+3}+2$
	Przekształcenie wzoru funkcji f do postaci: $f(x)=\frac{2x+8}{x+3}$ i odczytanie wartości parametrów: $a=2$, $b=8$, $c=3$
14. b)	Zapisanie równania $f(x)-g(x)=2$ w postaci: $\frac{2x+8}{x+3}-\frac{2x+4}{x+3}=2$, $x\neq-3$
	Przekształcenie równania do postaci: $\frac{2}{x+3}=1$ i podanie rozwiaząnia: $x=-1$
15. a)	Zapisanie sumy i iloczynu pierwiastków równania za pomocą wzorów Viète'a: $x_1+x_2=\frac{2m}{m}=2$, $x_1\cdot x_2=\frac{m-2}{m}$
	Zapisanie wzoru funkcji f: $f(m)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2m}{m-2}$
	Wyznaczenie dziedziny funkcji f z warunku $\Delta>0$ i $m\neq2$: $D=(0;2)\cup(2;\infty)$
	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
15. b)	Odczytanie z wykresu rozwiązania nierówności $f(m)>4$: $m\in(2;4)$
16.	Zapisanie współrzędnych punktów P i Q w postaci: $P\left(x,\frac{1}{x^2}\right)$, $Q\left(-x,\frac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x>0$
	Zapisanie długości odcinka PQ i wysokości h trójkąta PQR: $\lvert PQ\rvert=2x$, $h=\frac{1}{x^2}+4$
	Zapisanie pola trójkąta PQR w postaci: $P=\frac{1}{2}\cdot2x\left(\frac{1}{x^2}+4\right)=\frac{1}{x}+4x$
	Zauważenie, że dla $x>0$ nierówność $\frac{1}{x}+4x\geqslant4$ jest równoważna nierówności: $(2x-1)^2\geqslant0$
	Sformułowanie wniosku: $(2x-1)^2\geqslant0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.
17. a)	Zapisanie współrzędnych punktów A i B w postaci $A\left(p,\frac{4}{p}\right)$ i $B\left(s,\frac{4}{s}\right)$, jako punktów leżących na hiperboli $y=\frac{4}{x}$
	Zapisanie współrzędnych środka odcinka AB w postaci warunków: $\frac{p+s}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{\frac{4}{p}+\frac{4}{s}}{2}=-1$ i przekształcenie ich do postaci: $p+s=1$, $\frac{4}{p}+\frac{4}{s}=-2$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
17. a) cd.	Rozwiązanie równania $\frac{4}{p}+\frac{4}{1-p}=-2$: $p=-1$ lub $p=2$ i wyznaczenie współrzędnych punktów: A i B, np. $A(-1,-4)$, $B(2,2)$ Wykorzystanie otrzymanych współrzędnych punktów A i B do wyznaczenia współczynników a i b: $a=2$, $b=6$
17. b)	Naszkicowanie wykresów funkcji f i g w jedynym układzie współrzędnych  Odczytanie rozwiązania nierówności $f(x) \geqslant g(x)$: $x \in \{-1\} \cup (0;2\rangle$