

Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi
i modele
- s. 160

Zadanie 1. (4 pkt)

Rozwiąż nierówność $f(x+1) < f(x)$, gdzie $f(x) = 1 - \frac{2}{x-1}$.

Zadanie 2. (7 pkt)

Wyznacz zbiór $A' \cap B'$, wiedząc, że:

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} : \frac{x+10}{x} < 3 \right\}, B = \{ x \in \mathbf{R} : x^3 + 10x^2 \leq x^4 - 8x \}$$

Zadanie 3. (5 pkt)

Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie hiperboli o równaniu $y = \frac{3}{2x}$. Asymptotami tego wykresu są proste $x = a$ oraz $y = b$, gdzie $a = \log_{\sqrt{3}} \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \right)$ oraz $b = \log_2 3 \cdot \log_3 8$. Podaj wzór funkcji f i wyznacz jej miejsce zerowe.

Zadanie 4. (5 pkt)

Asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x+a}{x+b}$ jest prosta $x = -1$.

a) Oblicz b i podaj równanie asymptoty poziomej wykresu funkcji f .

b) Oblicz a , jeżeli wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{2}{x}$.

Zadanie 5. (4 pkt)

Iloczyn liczb x i y jest o 2 większy od ich sumy. Przedstaw y jako funkcję zmiennej x . Podaj dziedzinę tej funkcji i jej zbiór wartości.

Zadanie 6. (5 pkt)

Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \left| \frac{4}{x} - p \right|$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f dla $p = 2$ oraz odczytaj z niego rozwiązania równania $f(x) = 2$.

b) Wykaż, że równanie $\left| \frac{4}{x} - p \right| = p$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnej liczby $p > 0$.

Zadanie 7. (5 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{3x+a}{x+b}$$

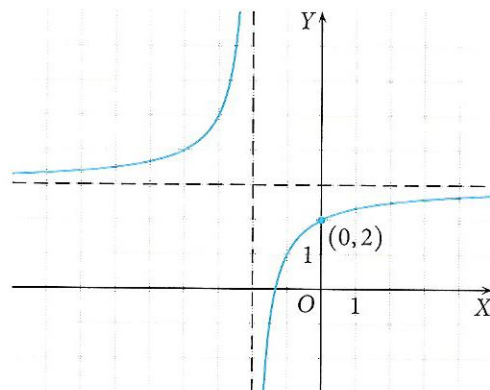
a) Oblicz a i b .

b) Rozwiąż nierówność $f(x) < f(x-1)$.

Zadanie 8. (4 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = 2 - \frac{4}{x}$. Rozwiąż nierówność

$$\frac{f(x+1)}{f(x-1)} > 0.$$



Zadanie 9. (4 pkt)

Naszkiuj wykres funkcji $f(x) = \frac{12}{|x|+2} - 3$. Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie $f(x) = m^2$ ma dwa rozwiązania.

Zadanie 10. (6 pkt)

Naszkiuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ oraz $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$ i podaj ich zbiory wartości.

Zadanie 11. (4 pkt)

Naszkiuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^2 + 2x - 3}$ i $g(x) = f(x) + |f(x)|$.

Zadanie 12. (5 pkt)

Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie $|x + 3| = \frac{m}{m-4}$ ma dwa pierwiastki różnych znaków.

Zadanie 13. (5 pkt)

Wykres funkcji $f(x) = \frac{8}{x}$ przesunięto o wektor $\vec{u} = [-2, 1]$. Wykaż, że tak otrzymana hiperbola ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą o równaniu $y = x^2 + 4x + 5$.

Zadanie 14. (5 pkt)

Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$.

a) Wyznacz współczynniki a , b i c , jeżeli wykres funkcji f jest symetryczny do wykresu funkcji $g(x) = \frac{2x+4}{x+3}$ względem prostej $y = 2$.

b) Rozwiąż równanie $f(x) - g(x) = 2$.

Zadanie 15. (6 pkt)

Funkcja f przyporządkowuje liczbie m sumę odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $mx^2 - 2mx + m - 2 = 0$.

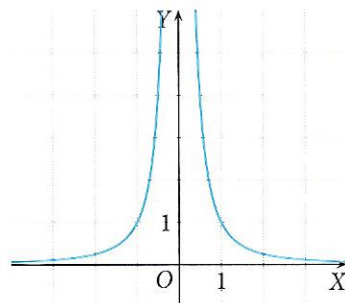
a) Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji f .

b) Dla jakich wartości parametru m funkcja f przyjmuje wartości większe od 4?

Zadanie 16. (5 pkt)

Punkty P i Q o tej samej rzędnej należą do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (rysunek obok). Punkt R należy do prostej $y = -4$.

Wykaż, że pole trójkąta PQR jest większe lub równe 4.

**Zadanie 17.** (7 pkt)

Wykresy funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$ i $g(x) = ax^2 - b$ przecinają się w punktach A i B . Punkt $S(\frac{1}{2}, -1)$ jest środkiem odcinka AB .

a) Oblicz współrzędne punktów A i B oraz współczynniki a i b .

b) Z wykresów funkcji f i g odczytaj rozwiązania nierówności $f(x) \geq g(x)$.