Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi – s. 183
modele – s. 184

Zadanie 1. (6 pkt)
Dany jest ciąg $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (2n-1)$.

a) Uzasadnij, że (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

b) Oblicz sumę stu jeden początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Zadanie 2. (5 pkt)
Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa $-\frac{7}{4}n + \frac{1}{4}n^2$ dla $n \geqslant 1$. Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.

Zadanie 3. (5 pkt)
Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (0;1) \cup (1;\infty)$ liczby $\log_2 x$, $\log_m x$, $\log_4 x$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz m.

Zadanie 4. (4 pkt)
Rozwiąż równanie $2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{2x-1} = 64 \cdot 4^{x+1}$.

Zadanie 5. (5 pkt)
Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 4, a suma dziesięciu początkowych jego wyrazów wynosi 132. Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 6. (5 pkt)
Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 2. Ciąg (b_n) dany jest wzorem $b_n = \log_2 a_n$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu (b_n) wynosi -35. Oblicz iloraz q ciągu (a_n).

Zadanie 7. (6 pkt)
Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a_n).

a) Uzasadnij, że ciąg $b_n = \frac{1}{a_n}$ także jest ciągiem geometrycznym.

b) Wiedząc, że suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 124, a suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (b_n) wynosi 31, oblicz iloczyn dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Zadanie 8. (4 pkt)
Dany jest ciąg (a_n), dla którego $a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} = 105$. Ciąg (b_n) dany wzorem $b_n = 2^{a_n}$ jest geometryczny. Oblicz ósmy wyraz ciągu (b_n).

Zadanie 9. (3 pkt) CKE 2015
Niech P_n oznacza pole koła o promieniu $\frac{1}{2^n}$, dla $n \geqslant 1$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (P_n).

8. CIĄGI

Zadanie 10. (4 pkt)
Pierwszy, czwarty i dwudziesty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy $r \neq 0$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu.

Zadanie 11. (4 pkt)
Liczby a, b i c tworzą rosnący ciąg geometryczny. Liczby a, b, $c-3$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz a, b, c, jeżeli wiadomo, że $a \cdot c = 324$.

Zadanie 12. (5 pkt) CKE
O liczbach a, b, c wiemy, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + c = 10$, zaś ciąg $(a+1, b+4, c+19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

Zadanie 13. (4 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = -2x + 4$. Uzasadnij, że jeśli (x_n) jest ciągiem arytmetycznym, to $y_n = f(x_n)$ także nim jest.

Zadanie 14. (3 pkt)
Wykaż, że jeśli liczby $a - b$, ab i $c - a$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to liczby $2a^2$, $c - b$ i $2b^2$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 15. (5 pkt)
Suma sześciu początkowych wyrazów malejącego ciągu geometrycznego (a_n) jest 72 razy większa od sumy trzech następnych jego wyrazów. Wyznacz wzór ogólny ciągu, jeżeli iloczyn wyrazów drugiego i czwartego jest równy 4.

Zadanie 16. (6 pkt)
Ciąg (a_n) jest dany wzorem rekurencyjnym $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}$ dla $n \geqslant 1$. Dziewiąty i dwudziesty piąty wyraz tego ciągu są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Wyznacz argumenty, dla których wielomian w przyjmuje wartości nieujemne.

Zadanie 17. (5 pkt)
Rozwiąż nierówność, jeżeli jej lewa strona jest sumą kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$\frac{2x}{3x-1} + \frac{6x}{3x-1} + \ldots + \frac{98x}{3x-1} \geqslant 625$$

Zadanie 18. (5 pkt)
Liczby a, b, c, d, e i f tworzą ciąg geometryczny.

a) Wyznacz miejsca zerowe funkcji $w(x) = ax^5 - bx^4 - 2cx^3 + 2dx^2 + ex - f$ dla $a \neq 0$.

b) Rozwiąż nierówność $w(x) \geqslant 0$ dla $a = -1$ i ilorazu 2.

Zadanie 19. (4 pkt)
Rozwiąż równanie $||x - a| - b| = 2$, gdzie a jest czwartym, a b – piątym wyrazem ciągu określonego rekurencyjnie $a_1 = -5$, $a_n = a_{n-1} + 2$.

8. CIĄGI

Zadanie 20. (2 pkt) CKE 2015

Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-\frac{(n+2)^2}{n+444}\right)$.

Zadanie 21. (3 pkt)

Dane są ciągi $a_n=\frac{6n^3+5n-7}{(1-n)^3}$ oraz $b_n=\frac{\sqrt[3]{27n^3-1}}{n-1}$. Oblicz granicę ciągu $c_n=(3b_n-a_n)^2$.

Zadanie 22. (7 pkt)

Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n=\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2n+1}$.

a) Uzasadnij, że dla każdego $p\neq 1$ ciąg (a_n) jest geometryczny. Wyznacz iloraz ciągu (a_n).

b) Wyznacz wartości parametru p, dla których szereg $a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots$ jest zbieżny, i oblicz sumę tego szeregu. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

Zadanie 23. (6 pkt)

Wyznacz wartości parametru p, dla których szereg geometryczny:

$$\left(p^3+3p^2-3p-9\right)+(p+3)+\ldots$$

jest zbieżny. Oblicz sumę tego szeregu.

Zadanie 24. (5 pkt)

Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n), którego wyrazy spełniają układ równań:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+\ldots=57 \\ a_2+a_5+a_8+\ldots=18 \end{cases}$$

Zadanie 25. (4 pkt)

Oblicz $f(k)$, gdzie k jest najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią należącą do dziedziny funkcji:

$$f(x)=1+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{16}{(x-1)^4}+\ldots$$

Zadanie 26. (6 pkt)

Dla jakich wartości parametru m równanie $1+2\cos^2 x+4\cos^4 x+\ldots=m$ ma rozwiązania?

Zadanie 27. (5 pkt)

Oblicz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli suma wszystkich jego wyrazów jest równa $\sqrt{15}$, a suma kwadratów jego wyrazów jest trzy razy mniejsza od sumy ich czwartych potęg.

Zadanie 28. (4 pkt)

Rozwiąż nierówność $2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\ldots<-4x+8$.